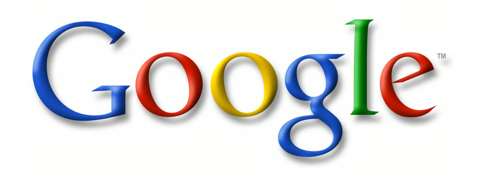
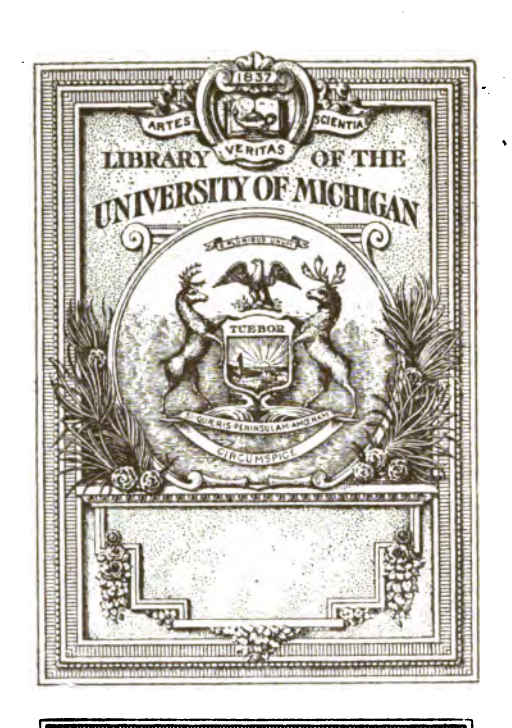
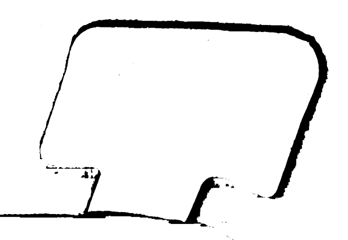

Google


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ANWENDUNGEN
DER
INFINITESIMALRECHNUNG
IN DEN
NATURWISSENSCHAFTEN
IM
HOCHBAU UND IN DER TECHNIK.

LEHRBUCH UND AUFGABENSAMMLUNG.

IN SECHS THEILEN,
VON DENEN JEDER EIN SELBSTSTÄNDIGES GANZES BILDET.

VERFASST VON

DR. ARWED FUHRMANN,
ORDENTL. PROFESSOR AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DRESDEN.

THEIL II:
NATURWISSENSCHAFTLICHE ANWENDUNGEN
DER
INTEGRALRECHNUNG.

BERLIN.
VERLAG VON ERNST & KORN.
(WILHELM ERNST.)
1890.

NATURWISSENSCHAFTLICHE ANWENDUNGEN DER INTEGRALRECHNUNG.

LEHRBUCH UND AUFGABENSAMMLUNG.

VERFASST VON

DR. ARWED FUHRMANN,

ORDENTL. PROFESSOR AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DRESDEN.

MIT 73 HOLZSCHNITTEN.

BERLIN.
VERLAG VON ERNST & KORN.
(WILHELM ERNST.)
1890.

Vorrede.

Wer Studirenden der Naturwissenschaften, des Hochbaues oder der Technik Differential- und Integralrechnung vorzutragen hat, macht immer von Neuem die Erfahrung, dass dem Lehrfache dann das grösste Interesse gezeigt wird, wenn mit den Vorlesungen Uebungen verbunden sind, in denen die fachwissenschaftlichen Anwendungen so viel wie möglich Berücksichtigung finden.

Mit erfreulichem Eifer behandeln die bezeichneten Studirenden Aufgaben, die den Gebieten direct angehören, welche dereinst das Berufsfeld bilden sollen; mit Gleichgültigkeit, oft sogar mit Unlust, lösen die meisten derartigen Studenten Probleme, welche entweder keine unmittelbare Beziehung zu den Fachstudien haben, oder wenigstens eine solche Beziehung nicht erkennen lassen.

Soll man, angesichts dieser Thatsache, dem Studirenden Das verweigern, wonach er am meisten verlangt? Ich verneine diese Frage ganz entschieden. Denn wer mit Erfolg lehren will, muss dem Lernenden Lust zur Sache, Freude an der Arbeit wecken und erhalten! Auch muss er ihn bald anleiten und fähig machen, das Gelernte auf seinem künftigen Berufsgebiete zur Anwendung zu bringen.

Was man dagegen sagen kann, ist ungenügend!

Es haben daher schon viele Professoren der Mathematik (unter ihnen auch die, welche an der Technischen Hochschule zu Dresden wirken) Uebungen eingerichtet, die neben den Vorlesungen über Infinitesimalrechnung herlaufen oder letzteren bald folgen und in denen der Student mit Aufgaben beschäftigt wird, die, so weit es angeht, direct den Fachgebieten entnommen sind.

Die von Schlömilch, Sohncke-Amstein, Dölp und Anderen veröffentlichten — und in ihrer Art ganz vorzüglichen — Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung enthalten sehr wenige Anwendungen der oben genannten Art.

Man muss daher, als Lehrer, viele selbst erfinden, oder in der betreffenden Literatur aufsuchen. Das ist zeitraubend, besonders weil es sich, aus naheliegenden Gründen, darum handelt, mit Vorsicht auszuwählen.

Und wenn Studirende — oder junge Männer, welche bereits der Praxis angehören — die Bitte aussprechen, ihnen eine ihrem Fachgebiete sich anschliessende Sammlung von Aufgaben aus der Infinitesimalrechnung zu nennen, so ist man in der unangenehmen Lage, sagen zu müssen, dass es keine giebt.

Die angeführten Gründe haben in mir, auf der Basis vieljähriger Erfahrungen, die Absicht angeregt, drei Schriften zu veröffentlichen, durch welche den oben ausgesprochenen Thatsachen Rechnung getragen wird, indem die bereits vorhandenen Aufgabensammlungen (von Schlömilch, Sohncke-Amstein u. A.) eine Ergänzung und Erweiterung erfahren. Es hat das bei sehr massgebenden Sachverständigen volle Zustimmung gefunden.

Die erste jener drei Schriften, nämlich die, deren erste Hälfte ich hiermit veröffentliche, ist für Studirende und Ausübende der Naturwissenschaften bestimmt; ihr soll recht bald eine zweite folgen, die den Bedürfnissen der Architekten und Bauingenieure besondere Rechnung trägt; endlich eine dritte, welche Dasselbe für Fabrik- und Maschineningenieure leistet. Es sollen diese drei Schriften zu einem in drei Bänden erscheinenden Werke über „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik“ vereinigt werden, von welchem jedoch die Betreffenden nur einen Band zu studiren brauchen. Jeder der beiden Theile eines solchen Bandes wird ein selbstständiges Ganzes bilden und einzeln verkäuflich sein.

Ich hoffe, den Stoff so gewählt zu haben, dass Jeder hinreichend viele Aufgaben finden wird, die seinen Wünschen entsprechen. Man wolle in dieser Beziehung das „Inhaltsverzeichniss" (Seite IX—XII) und das „Alphabetische Sachenverzeichniss" (Seite 143—146) beachten. Den Bedürfnissen der Anfänger habe ich besonders Rechnung getragen, auch für den vorliegenden ersten Theil des Werkes nur Das aus den Naturwissenschaften als bekannt vorausgesetzt, was jeder Studirende in den allgemeinen Vorlesungen gehört haben muss, die an den Universitäten, Technischen Hochschulen, Bergakademien u. s. w. in Bezug auf Physik und Chemie gehalten werden.

Im Allgemeinen bietet jeder Paragraph eine Aufgabe; ausnahmsweise deren mehrere, nämlich dann, wenn er in Abschnitte, die durch A, B, C, ... bezeichnet sind, getheilt ist.

Manche Lösungen sind sehr vollständig gegeben, andere nur in den Hauptzügen; es ist also verschiedenartigen Anforderungen hoffentlich genügt. Bei einigen Aufgaben wurden die Lösungen ganz weggelassen; dies geschah mit Rücksicht auf diejenigen Lehrer, welche das Buch benutzen werden; in manchen Fällen auch dann, wenn die Sache so einfach war, dass es des Angebens einer Lösung überhaupt nicht bedurfte.

Den Begriff „Studirende und Ausübende der Naturwissenschaften" habe ich sehr umfangreich genommen. Daher kommt es, dass einige Aufgaben, welche dem Fabrikwesen, der Volkswirthschaftslehre u. s. w. angehören, schon in dem ersten Theile des Werkes sich vorfinden.

Bezüglich der Differential- und Integralrechnung ist ungefähr Das als bekannt angesehen worden, was der erste Band von Schlömilch's „Compendium der höheren Analysis" — Braunschweig, 5. Auflage 1881 — enthält.

Ein Theil der von mir dargebotenen „Anwendungen" ist neu; das Uebrige gewann ich durch geeignete Benutzung derjenigen Arbeiten, welche an den betreffenden Stellen genannt sind und in dem „Literaturverzeichniss"

(Seite 147) zusammengestellt wurden. Die neuere Literatur hat dabei besondere Beachtung gefunden, was ich auch für die folgenden Theile des Werkes festzuhalten gedenke.

Es sollen die Literaturangaben nicht nur die Quellen nennen, aus denen ich schöpfte, sondern auch den Leser veranlassen, sich, wenn er Zeit dazu hat, eingehender mit dem berührten Gegenstande zu beschäftigen. Das gilt besonders da, wo ich, um das Selbstschaffen anzuregen, nur andeutete, statt auszuführen.

Ich hoffe, dass nicht nur die Studirenden, sondern auch die Praktiker der Naturwissenschaften und aller ihrer Anwendungen — besonders die Techniker und die Professoren der Technik — die vorliegende, bescheidene Ansprüche erhebende Schrift freundlich aufnehmen werden, weil sie dazu beitragen soll, jene Anwendungen zu fördern. Ich hoffe aber auch, manchen Professoren der Mathematik durch das Buch einen kleinen Dienst zu leisten, weil es in sehr bequemer Art die Möglichkeit bietet, Aufgaben zu stellen, oder auf Untersuchungen zu verweisen, die den Studirenden anziehend sein müssen und ihre Kräfte nicht übersteigen. Hierbei recht vielseitig zu sein, habe ich mich bemüht. Auch bin ich bestrebt gewesen, neben der Infinitesimalrechnung der analytischen Geometrie etwas Raum zu gönnen und den Anschluss an die Praxis durch Zahlenbeispiele, Constructionen u. s. w. zu fördern.

So gebe ich mich denn der Hoffnung hin, dass die Schrift, ungeachtet ihrer Mängel, bei sachgemässer Beurtheilung dieselbe wohlwollende Aufnahme finden werde, welche meine „Aufgaben aus der analytischen Mechanik“ (Leipzig, Teubner, 2. Aufl. 1879 und 1882) gefunden haben und dass sie nicht allein für den Gebrauch an Lehranstalten, sondern auch für das Selbststudium Nutzen zu schaffen im Stande sei.

Dresden, am 1. August 1888.

A. Fuhrmann.

Vorrede.

Die Hoffnungen, mit welchen ich den ersten Theil des vorliegenden Werkes über Infinitesimalrechnung, nämlich die „Naturwissenschaftlichen Anwendungen der Differentialrechnung" (1888), veröffentlichte, haben sich erfüllt. Der damals in der „Vorrede" entwickelte Plan, auf den hiermit verwiesen werden möge, hat nahezu allseitige Billigung gefunden und die in jenem ersten Theile dargebotene Durchführung des Planes ist nur auf ganz vereinzelt dastehenden Widerspruch gestossen. Beides geht hervor aus den zahlreich erschienenen Beurtheilungen, welche, grösstentheils von hervorragenden Mathematikern, Naturforschern und Technikern herrührend, fast ausnahmelos sehr günstig sind; ferner aus den Briefen, mit welchen eine grosse Anzahl höchst bedeutender Männer mich beehrte.

Ich danke allen Denen herzlich, welche den „I. Theil" meines Werkes wohlwollend aufgenommen haben und bin bemüht gewesen, den mir ertheilten Rathschlägen und Winken bei der Ausarbeitung des hiermit zur Veröffentlichung gelangenden „II. Theiles", nämlich der „Naturwissenschaftlichen Anwendungen der Integralrechnung" Folge zu leisten, so weit es der oben genannte Plan zuliess.

Da das ganze Werk besonders für Anfänger bestimmt ist, so habe ich auch in dem hier vorliegenden zweiten Theile Alles vermieden, was die Leistungsfähigkeit derselben in der Regel übersteigt; so z. B. Aufgaben, welche die Integration partieller Differentialgleichungen erfordern. Bezüglich derartiger Probleme möge auf die von Hattendorff

veröffentlichten Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen (siehe „Literaturverzeichniss“, Seite 267) verwiesen sein. Man findet in diesem Buche vorzüglich Untersuchungen über die Bewegung der Wärme, die Schwingungen elastischer fester Körper und die Bewegung der Flüssigkeiten. —

Bei der Beurtheilung meiner Arbeit, für deren Mängel ich durchaus nicht blind bin, wolle man beachten, dass der Durchführung ihres leitenden Gedankens erhebliche Schwierigkeiten entgegen stehen und es demnach schwer, wenn nicht unmöglich ist, allen Wünschen und Ansichten gerecht zu werden. Man wolle auch berücksichtigen, dass die Erreichung des von mir erstrebten Zieles einer wohlwollenden Förderung würdig ist, weil für die Mathematik, die Naturwissenschaften und die Technik mit der Zeit einiger Gewinn erhofft werden kann, wenn es gelingt, die Studirenden auf dem durch meine „Anwendungen der Infinitesimalrechnung“ eingeschlagenen Wege zu ernster mathematischer Arbeit auf ihren künftigen Berufsgebieten anzuregen.

Dass Letzteres durch den „I. Theil“ des geplanten Werkes bis jetzt geschehen sei, darf man, hoffe ich, aus der umfangreichen Verbreitung schliessen, welche derselbe sowohl in Deutschland und Oesterreich, als auch in England, Italien, Russland, Schweden und anderen Staaten gefunden hat.

Ich würde mich glücklich schätzen, wenn die folgenden „Theile“ ebenfalls in dem genannten Sinne wirkten. Besonders erfreut würde ich sein, wenn auch die Studirenden der Chemie (welche auf die §§ 2, 11, 44—48 besonders hingewiesen werden mögen) das Buch fleissig benutzten, was ihnen von sehr hervorragender Seite gerathen worden ist*). Es trüge eine solche Benutzung, wenn sie an umfangreiche und tiefe chemische Studien sich anschlösse, hoffentlich dazu bei, die künftigen Vertreter der Chemie auszurüsten mit dem „mächtigsten Werkzeuge der Naturforschung“, nämlich mit einer zu

*) Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. 2, S. 863 und 864. (Recension von W. Ostwald.)

Anwendungen befähigenden Kenntniss der Mathematik, ohne deren Hilfe „wir nimmer hoffen dürfen, die so sehr verwickelten chemischen Vorgänge ihrem Wesen nach zu enträthseln*).“

Wenn die Studirenden der Chemie sich entschlössen, oder durch massgebenden Einfluss dazu gebracht werden könnten, gediegenen chemischen Kenntnissen eine zu Anwendungen stets bereite mathematische Ausrüstung beizufügen, so würde aus den Kreisen der jungen Chemiker vielleicht bald der „Newton der Chemie“ hervorgehen, welchen E. Du Bois-Reymond**), im Anschlusse an Kant's Aeusserungen***), verheissen hat, der Glückliche, welchem es gelingt, eine Mechanik der Atome zu schaffen und damit die Chemie auf eine ganz sichere mathematische Grundfläche zu stellen, während jetzt, nach dem Ausspruche V. Meyer's,†) „die heiter schaffende Phantasie die vornehmste Triebfeder ihrer Forschung bildet.“

Dresden, am 18. September 1890.

A. Fuhrmann.

---

*) Horstmann, Landolt und Winkelmann, Lehrbuch der Chemie. II. Abth. (1885; von Horstmann;) S. 3.

**) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1882, S. 729 und 730.

***) Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft; 2. Aufl., 1787, S. VIII u. X.

†) Chemische Probleme der Gegenwart; 2. Aufl., 1890, S. 45. u. 46. — Ferner: Bauer, Wesen u. Bedeutung der neuen chemischen Formeln; S. 194. (Siehe das „Literaturverzeichniss“ am Ende dieses Buches; nämlich Seite 265).

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Cap. I. Einfache Integrationen.

Cap. II. Mehrfache Integrationen.

Cap. III. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Cap. IV. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Capitel I.

EINFACHE INTEGRATIONEN.

§ 1. Einleitung.

Für die nachfolgenden Anwendungen der einfachen Integration wird Dasjenige als bekannt vorausgesetzt, was die am meisten verbreiteten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung bezüglich der Natur des Integrals und hinsichtlich der Ermittelung von Integralwerthen enthalten. Man sehe hierüber: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 64 — 79 und § 89—91 der fünften Auflage; oder Stegemann, Grundriss der Differential- und Integralrechnung, § 1—40, 42—43, 45—51, 53, 60, 61 und 68 der vierten, von Kiepert herausgegebenen, Auflage des 2. Bandes; oder die entsprechenden Abschnitte anderer Lehrbücher derselben Art.

Um zunächst die für die Herleitung von Integralwerthen geltenden Sätze an einigen Beispielen einzuüben, möge (unter den im Nachfolgenden genannten Voraussetzungen) berechnet werden

$$\text{I.}\quad J_1 = \int_{v_2}^{v_3} \frac{dv}{v^k},$$

$$\text{II.}\quad J_2 = \int \frac{dx}{(A-x)(B-x)},$$

$$\text{III.}\quad J_3 = \int \frac{dx}{(A-x)(B-x)(C-x)},$$

$$\text{IV.}\quad J_4 = \int_{-a}^{+a} \frac{(c-x)\,dx}{\sqrt{a^2+c^2-2cx}^{\,3}},$$

$$\text{V.}\quad J_5 = \int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx,$$

$$\text{VI.} \quad J_6 = \int_0^\infty x N e^{-\alpha x} \alpha \, dx,$$

$$\text{VII.} \quad J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta,$$

$$\text{VIII.} \quad J_8 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos\varphi} \sin\varphi \, d\varphi.$$

Nr. I wird beispielsweise bei der Ableitung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie gebraucht (man sehe etwa: Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 3, S. 375 der 3. Auflage) und soll ermittelt werden unter der Voraussetzung, dass k grösser als 1 ist.

Auf die Integrale II und III führt die Untersuchung chemischer Vorgänge zweiter und dritter Ordnung (§ 46, A, II, und § 47, A, III).

Nr. IV kommt vor bei der Berechnung der Anziehung, welche eine Kugelfläche auf einen Punkt ausübt*); dabei bedeutet a den Kugelhalbmesser und c, welches grösser als a vorausgesetzt wird, den Abstand des angezogenen Punktes vom Centrum, was bei der Behandelung von IV gehörig zu beachten ist. (Man vergleiche § 34, B.)

Auf das fünfte Integral führt die Untersuchung des freien Falles, wenn sie mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Schwere durchgeführt wird. Es soll J_5 berechnet werden unter Erfüllung der Bedingung, dass für $x = 0$ auch $J_5 = 0$ ist. (§ 54.)

Nr. VI kommt in der dynamischen Theorie der Gase bei der Bestimmung der mittleren Wegelänge der Gasmoleküle vor; dabei sind N, e und α positive, constante Grössen. (Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, S. 451 der 4. Auflage.)

Berechnung der Integrale Nr. VII und VIII verlangt die

---

*) Das „Vorkommen“ (in den Naturwissenschaften) und die Literaturangaben sind hier, im Vorhergehenden und im Folgenden (bis VIII) immer beispielsweise gemeint.

mechanische Theorie der Wärme. (Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 3, S. 323, bezüglich 332 der 3. Auflage.)

Lösung. I. Der für die Integration der Potenz geltende Satz liefert

1) $$J_1 = \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{v_2^{k-1}} - \frac{1}{v_3^{k-1}}\right).$$

II. Spaltung in Partialbrüche, giebt

2) $$J_2 = \frac{1}{A-B}\, l^{*)}\, \frac{A-x}{B-x} + \text{Const.}$$

III. Auf demselben Wege gelangt man zu dem Werthe

3) $$J_3 = \frac{\alpha\, l\,(A-x) + \beta\, l\,(B-x) + \gamma\, l\,(C-x)}{\alpha\beta\gamma} + \text{Const.},$$

in welchem

4) $$\alpha = B - C,\ \beta = C - A,\ \gamma = A - B$$

ist. (Vergl. § 47, A, III.)

IV. Die Benutzung der Substitution

5) $$\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx} = u$$

liefert, unter Beachtung ihrer aus dem Wortlaute der Aufgabe hervorgehenden geometrischen Bedeutung (§ 34, B):

6) $$J_4 = \frac{2a}{c^2}.$$

V. Setzt man

7) $$x = a \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

führt also einen Hilfswinkel ein, so ergiebt sich leicht:

8) $$J_5 = \frac{a}{2}(\theta + \sin\theta),$$

mithin

9) $$J_5 = \sqrt{x(a-x)} + a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

VI. Anwendung des für die Integration des Produktes geltenden Satzes liefert:

10) $$J_6 = \frac{N}{\alpha}.$$

*) Das Zeichen l bedeutet immer den natürlichen Logarithmus.

VII. Das zu berechnende Integral hat im Wesentlichen die Form

$$\int v^m\, dv.$$

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man sofort:

11) $$J_7 = \tfrac{1}{3}.$$

VIII. In derselben Weise ergiebt sich

12) $$J_8 = \tfrac{4}{3}\sqrt{2},$$

oder, auf vier Decimalstellen abgerundet,

13) $$J_8 = 1{,}8856.$$

Anmerkung zu § 1. Weitere Beispiele für die Berechnung von Integralwerthen können dem Folgenden in grosser Anzahl entnommen werden, wenn die vorstehenden nicht ausreichend erscheinen. Zunächst bietet der § 2 derartiges Material und ist in diesem Sinne aufzufassen.

§ 2. Bestimmte Integrale bei chemischen Vorgängen.

A.*)

Bei der Auflösung von Calciumcarbonat in Salzsäure hängt (unter gewissen Voraussetzungen) die in der unendlich kleinen Zeit dt erzeugte Menge dy des entstehenden Chlorcalciums von der seit dem Beginne des Vorganges verflossenen Zeit t ab nach der Gleichung

1) $$dy = \frac{cP}{V} e^{-\frac{2ct}{V}} dt,$$

in welcher c, e, P und V constante, positive Grössen bedeuten**).

Man leite aus Nr. 1

I. durch bestimmte Integration her, wie viele Moleküle Chlorcalcium sich in dem von $t = 0$ bis $t = t_1$ reichenden Zeitraume bilden.

Sodann berechne man

II. welche (vom Beginne des Vorganges an gezählte) Zeiten erforderlich sind zur Erzeugung von

$$\tfrac{1}{10}P,\ \tfrac{2}{10}P,\ \tfrac{3}{10}P,\ \tfrac{4}{10}P,\ \tfrac{5}{10}P$$

---

*) Man vergleiche § 45. (Chemische Vorgänge I. Ordnung.)

**) Näheres: van't Hoff, Ansichten über die organ. Chemie, Th. I, S. 180.

Chlorcalciummolekülen und wie jene Zeiten sich zu einander verhalten.

L ö s u n g. Die Anzahl der in dem genannten Zeitraume sich bildenden Chlorcalciummoleküle ist

$$y = \int_0^{t_1} \frac{cP}{V} e^{-\frac{2ct}{V}} dt,$$

mithin

2) $$y = \tfrac{1}{2} P \left(1 - e^{-\frac{2ct_1}{V}}\right).$$

Daher vergeht die Zeit

3) $$t_1 = \frac{V}{2c} l \frac{P}{P - 2y}$$

bis y derartiger Moleküle entstanden sind.

Nr. 3 giebt für $y = \frac{n}{10} P$:

4) $$t_1 = \frac{V}{2c} l \frac{5}{5-n};$$

also bezüglich der in der Aufgabe genannten Bruchtheile:

5) $$t_1 = \frac{V}{2c} l \tfrac{5}{4}, \quad \frac{V}{2c} l \tfrac{5}{3}, \quad \frac{V}{2c} l \tfrac{5}{2}, \quad \frac{V}{2c} l 5, \quad \infty.$$

Es verhalten sich diese Zeiten, wie

6) $$l \tfrac{5}{4} : l \tfrac{5}{3} : l \tfrac{5}{2} : l 5 : \infty.$$

B.*)

Wenn in der Raumeinheit q Moleküle C h l o r auf q Moleküle eines s u b s t i t u i r b a r e n K ö r p e r s wirken, so ist die in der unendlich kleinen Zeit dt gebildete Menge dy des Reactionsproductes von der seit Beginn der Einwirkung verflossenen Zeit t abhängig nach der Gleichung

7) $$dy = \frac{cq^2}{(1 + cqt)^2} dt,$$

wobei c den „Einwirkungscoefficienten" (eine Constante) bezeichnet**).

---

*) Siehe § 46. (Chemische Vorgänge II. Ordnung.)

**) v a n ' t H o f f, Ansichten über die organ. Chemie, Th. II, S. 11.

Es soll aus Nr. 7 abgeleitet werden

I. wie viele Moleküle (y) in den ersten t_1 Zeiteinheiten sich erzeugen;

II. welcher Zeiträume es zur Bildung von

$$\tfrac{1}{4}q,\ \tfrac{1}{2}q,\ \tfrac{3}{4}q,\ q$$

Molekülen des Reactionsproduktes bedarf und in welchem Verhältnisse jene Zeiten zu einander stehen.

Lösung. Während der ersten t_1 Zeiteinheiten entstehen

8) $$y = \frac{c q^2 t_1}{1 + c q t_1}$$

Moleküle. Sollen deren $\frac{n}{4} q$ erzeugt werden, so bedarf es hierzu der Zeit

9) $$t_1 = \frac{n}{c(4-n)q}.$$

Die zu

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

gehörenden Zeiträume verhalten sich mithin wie

$$1 : 3 : 9 : \infty.$$

§ 3. Flächeninhaltsberechnungen, welche sich auf das Mariotte'sche Gesetz beziehen.

Bekanntlich ist das Mariotte'sche oder Boyle'sche Gesetz ausgedrückt durch die Gleichung

1) $$v p = v_0 p_0,$$

in welcher v das Gasvolumen bei dem Drucke p, v_0 dasjenige bei dem Drucke p_0 (im Anfangszustande) bezeichnet. (Vergl. Th. I, § 25.)

Es sollen die Flächeninhalte der Linien berechnet werden, welche jenes Gesetz geometrisch darstellen, wenn man die Veränderlichen entweder

I. als Parallelcoordinaten (p als x, v als y), oder

II. als Polarcoordinaten (p als Anomalie, v als Leitstrahl, r) auffasst.

Im ersten Falle möge die Fläche begrenzt sein von derjenigen Ordinate, welche durch den Scheitel der betreffenden Curve geht,

ferner von der allgemeinen Ordinate, von der Abscissenachse und von der Linie selbst; im zweiten Falle soll sie von dem Leitstrahle ab, der zu der Anomalie $\theta = 1$ gehört, bis zu dem allgemeinen Leitstrahle gemeint sein (und zwar als eine bis zum Pole reichende Sectorfläche).

Für den letztgenannten Fall möge man angeben, wie sich der Inhalt als Dreieck construiren lässt.

Lösung. I. Wird $p = x$, $v = y$ und $v_0 p_0 = c^2$ gesetzt, so lautet das Mariotte'sche Gesetz:

2) $$x y = c^2,$$

bedeutet mithin eine auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel.

Für den gesuchten Flächeninhalt S hat man die Gleichung

3) $$S = \sin 2\alpha \int_c^x \frac{c^2}{x}\, dx,$$

wobei 2α der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel ist.

Aus Nr. 3 folgt:

4) $$S = h^2 l \frac{x}{c},$$

wenn, zur Abkürzung,

5) $$c^2 \sin 2\alpha = h^2$$

gesetzt wird. Der Factor h^2 hat dabei eine sofort erkennbare geometrische Bedeutung. *)

II. Fasst man die Gleichung Nr. 1 in der Form

6) $$r\theta = k, \; k = v_0 p_0,$$

als die einer auf Polarcoordinaten bezogenen Linie auf, so stellt sie die bekannte hyperbolische Spirale dar. Letztere hat, was man sofort aus 6 entnehmen kann, eine asymptotische Gerade (welche im Abstande k der Polarachse parallel liegt) und einen asymptotischen Punkt (den Pol des Systems).

Für die in der Aufgabe bezeichnete Sectorfläche gilt die Gleichung

*) Man unterlasse nicht, für I., wie auch für II., eine Figur in geeignetem Massstabe zu zeichnen. — Ferner beachte man den Schlusssatz des Abschnittes A im § 7.

7) $$S_1 = \frac{1}{2}\int_1^\theta r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_1^\theta \frac{k^2}{\theta^2}\, d\theta.$$

Sie giebt:

8) $$S_1 = \frac{\theta - 1}{2\theta}\, k^2,$$

oder, durch die Leitstrahllänge ausgedrückt,

9) $$S_1 = \frac{1}{2}\, k\,(k - r).$$

Der letzte Ausdruck ist sofort als Dreieck mit der Grundlinie k und der Höhe $k - r$ construirbar.

§ 4. Quadraturen, die Begriffe „Geschwindigkeit" und „Beschleunigung" betreffend.

A.

Die Geschwindigkeit v irgend einer geradlinigen Bewegung*) möge als Function der Zeit t gegeben sein, es möge also eine Gleichung von der Form

1) $$v = f(t)$$

bestehen.

Man soll (unter Benutzung des § 12 des I. Theiles dieses Buches) zeigen, auf welche Weise sich der zurückgelegte Weg s als Fläche einer Curve darstellen lässt, wenn die Veränderlichen t und v als rechtwinklige Coordinaten aufgefasst werden, und zwar t als Abscisse genommen wird, v als Ordinate

Auch soll man angeben, wie das Ergebniss lautet, wenn die betreffende Bewegung der freie Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit ist und wenn dabei der Zeitraum von $t = t_0$ bis $t = t_1$ gemeint wird.

Lösung. Gemäss Theil I, S. 15, Gl. 3 ist

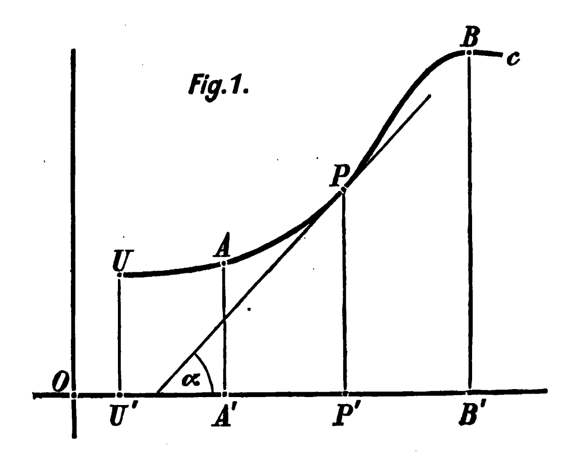
2) $$v = \frac{ds}{dt}.$$

*) Das hier Folgende gilt nicht nur für geradlinige Bewegungen, sondern auch (laut Th. I, S. 16 u. 17) für andere Vorgänge, z. B. chemische. Bei den Letzteren ist v vertreten durch die Reactionsgeschwindigkeit, s durch die Menge des bei dem Vorgange sich bildenden Stoffes. (Man vergleiche den § 2.)

Daraus folgt:

3) $$s = \int f(t)\,dt.$$

Es wird also der zurückgelegte Weg s geometrisch dargestellt durch den Flächeninhalt der



in Fig. 1 zur Anschauung gebrachten Geschwindigkeitslinie, nämlich derjenigen Curve c, deren Ordinaten der Gleichung Nr. 1 genügen.

Die Zeit und die Geschwindigkeit sind hierbei durch dieselbe Längeneinheit auszudrücken; dient als Zeiteinheit die Sekunde und wird die Geschwindigkeit in Metern gemeint, so hat man die Sekunde und das Meter durch eine und dieselbe Strecke darzustellen.

Sind die Anfangszeit t_0 und die Endzeit t_1 der Bewegung vorgeschrieben, so ist der Flächeninhalt s ein bestimmter, nämlich (wenn $OA' = t_0$, $OB' = t_1$) der von $A'A$ bis $B'B$ reichende, also $A'ABB'$ (wobei durch $A'A$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0, durch $B'B$ die Endgeschwindigkeit v_1 dargestellt wird). Sind jene Zeiten nicht vorgeschrieben, so ist der genannte Inhalt ein unbestimmter, reicht nämlich dann von der willkürlich wählbaren Anfangsordinate $U'U$ bis zu der allgemeinen Ordinate $P'P$.

Für den freien Fall (ohne Anfangsgeschwindigkeit) hat man bekanntlich

4) $$v = g t.$$

Das giebt:

5) $$s = \frac{1}{2} g (t_1^2 - t_0^2).$$

Es wird mithin der in der Zeit t_0 bis t_1 zurückgelegte Weg dargestellt durch den Flächeninhalt des Trapezes $A'ABB'$ (Fig. 2). Die Geschwindigkeitscurve ist nämlich eine durch den Coordinatenanfang gehende gerade Linie c, deren Steigungswinkel α die Gleichung

6) $$\tan \alpha = g$$

bestimmt, so dass für mittlere geographische Breiten Europas

7) $$\tan \alpha = 9{,}81,$$

also

8) $$\alpha = 84^{0}\,10'\,47''$$

ist (auf ganze Sekunden abgerundet). *)

Fig. 2.

B.

Sehr nahe liegt es, das unter A Behandelte auf die „Beschleunigung", für welche bekanntlich (Th. I, § 12) die Gleichung

9) $$p = \frac{dv}{dt}$$

gilt, zu übertragen, indem man t als Abscisse, p als Ordinate auffasst und sich p durch eine Gleichung von der Form

10) $$p = \varphi(t)$$

gegeben denkt.

Das möge im Folgenden geschehen. Auch soll das Ergebniss wieder auf den freien Fall (ohne Anfangsgeschwindigkeit) angewendet werden.

Lösung. Aus Nr. 9 folgt:

11) $$v = \int \varphi(t)\, dt.$$

---

*) Man vergleiche § 10.

Die Geschwindigkeit v (welche während einer gewissen Zeit erworben oder verloren wurde) ist also durch den Flächeninhalt der Beschleunigungscurve dargestellt, nämlich durch die Fläche derjenigen Linie, welche die Gleichung Nr. 10 hat.

Soll dabei keine Unbestimmtheit vorliegen, so muss (wie bei A) bekannt sein, auf welchen Zeitraum alles sich bezieht. Das giebt die Grenzen der durch die Gleichung 11 ausgesprochenen Integration.

Für den freien Fall ist bekanntlich

12) $$p = g.$$

Daher, laut 11,

13) $$v = g(t_1 - t_0).$$

Die Beschleunigungscurve ist hier eine Gerade, welche der Abscissenachse in dem Abstande g parallel liegt. Die während des Zeitraums t_0 bis t_1 erworbene Geschwindigkeit wird durch den Flächeninhalt eines Rechtecks dargestellt.

Anmerkung. Es ist, laut Gleichung 9,

$$p = \frac{dv}{dt}.$$

Dieses Verhältniss bedeutet aber für Fig. 1 bekanntlich die goniometrische Tangente desjenigen Winkels α, welchen die im allgemeinen Curvenpunkte P gezogene berührende Gerade mit der positiven Seite der Abscissenachse einschliesst.

Hiernach sind durch die genannte Figur sämmtliche Elemente (t, v, s und p) der Bewegung geometrisch dargestellt, nämlich

I. die Zeiten durch die Abscissen,

II. die Geschwindigkeiten durch die Ordinaten,

III. die zurückgelegten Wege durch die Flächeninhalte,

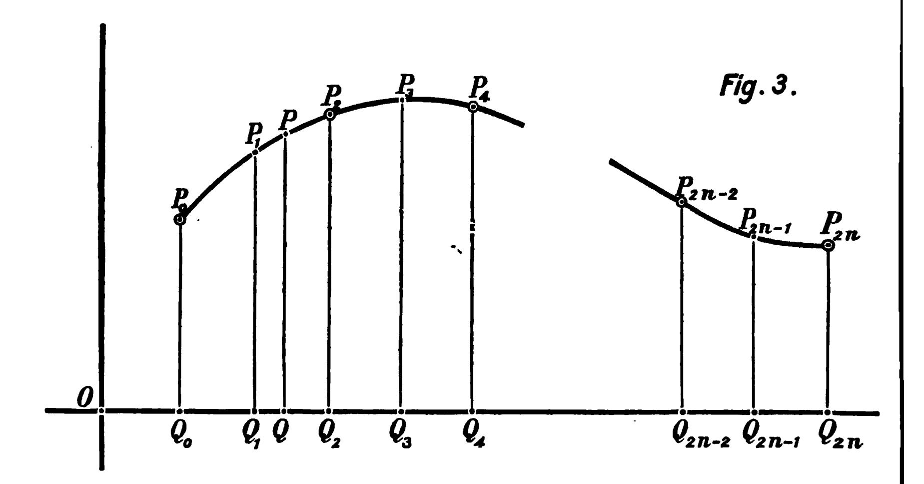
IV. die Beschleunigungen durch die goniometrischen Tangenten der Berührungswinkel,

§ 5. Die „Simpson'sche Regel" und naturwissenschaftliche Anwendungen derselben.

A.

Die Gleichung einer (die X-Achse nicht schneidenden) Curve $P_0 P_2$ lautet

1) $$y = a + bx + cx^2,$$



wobei (siehe Fig. 3) $x = OQ$, $y = QP$ ist, a, b und c aber constante Grössen sind.

I. Es soll der Inhalt S der zu den Abscissen $OQ_0 = x_0$ und $OQ_2 = x_0 + 2h$ gehörenden Fläche $Q_0 P_0 P_2 Q_2$ berechnet werden und zwar ausgedrückt durch die vier Strecken $h = Q_0 Q_1 = Q_1 Q_2$, $y_0 = Q_0 P_0$, $y_1 = Q_1 P_1$, $y_2 = Q_2 P_2$.

II. Die für S gewonnene Formel soll man benutzen, um den Inhalt S_1 der Fläche $Q_0 P_0 P_{2n} Q_{2n}$ (n als beliebige ganze Zahl gedacht) auszudrücken durch den unveränderlichen Ordinatenabstand

$$h = Q_0 Q_1 = Q_1 Q_2 = Q_2 Q_3 = \dots = Q_{2n-1} Q_{2n}$$

und durch die Ordinatenlängen

$$y_0 = Q_0 P_0,\ y_1 = Q_1 P_1,\ y_2 = Q_2 P_2,\ \dots y_{2n} = Q_{2n} P_{2n},$$

unter der Voraussetzung, dass die Begrenzung $P_0 P_1 P_2 \ldots P_{2n}$ aus einem Systeme von Curvenbögen $P_0 P_1 P_2$, $P_2 P_3 P_4$, ... $P_{2n-2} P_{2n-1} P_{2n}$ besteht, deren jeder eine Gleichung von der allgemeinen Form Nr. 1 besitzt (und die X-Achse nicht schneidet).

Lösung. I. Es ist

2) $$dS = y\,dx = (a + bx + cx^2)\,dx.$$

Die zur Ermittelung von S nöthige Integration wird am einfachsten, wenn man die Y-Achse von O nach Q_0 verschiebt (also x_0 gleich Null nimmt). Dann gilt die Gleichung

3) $$S = \int_0^{2h} (a + bx + cx^2)\,dx$$

folglich hat man:

4) $$S = \tfrac{1}{3} h \{6a + 6bh + 8ch^2\}.$$

Dabei sind a, b und c noch unbekannt, nämlich auszudrücken durch y_0, y_1, y_2.

Wegen Nr. 1 ist

5) $$y_0 = a,$$

6) $$y_1 = a + bh + ch^2,$$

7) $$y_2 = a + 2bh + 4ch^2.$$

Hieraus und aus Gl. 4 folgt:

8) $$S = \tfrac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2).\text{*)}$$

Der gesuchte Flächeninhalt $Q_0 P_0 P_2 Q_2$ ist also gleich dem eines Rechtecks, welches $Q_0 Q_2$ (nämlich $2h$) zur Grundlinie hat, als Höhe aber das (leicht construirbare) arithmetische Mittel der Strecken $\frac{1}{2} y_0$, $\frac{1}{2} y_2$ und $2y_1$, oder — was auf Dasselbe hinauskommt — die Strecke

9) $$\eta = \tfrac{1}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Der letztgenannte Ausdruck kann als „Mittelwerth" Benutzung finden. (Man vergleiche § 7).

II. Wird die Gleichung 8 auf jeden der Flächenstreifen $Q_0 P_0 P_2 Q_2$, $Q_2 P_2 P_4 Q_4$, ... $Q_{2n-2} P_{2n-2} P_{2n} Q_{2n}$ angewendet, so ergiebt sich für die Summe der Inhalte:

---

*) Anmerkung zu Nr. 8: Die vorstehende Entwickelung für eine nahe liegende Erweiterung durchzuführen, nämlich für den Fall, dass der betreffenden Linie die Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

zukommt, möge hiermit empfohlen sein.

$$10)\quad S_1 = \frac{h}{3}\Big\{(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})\Big\},$$

oder

$$11)\quad S_1 = \frac{h}{3}\Big\{(y_0 - y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n})\Big\};$$

mit Summenzeichen geschrieben:

$$12)\quad S_1 = \frac{h}{3}\Big\{y_0 + y_{2n} + 4\sum_{k=1}^{k=n} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{k=n-1} y_{2k}\Big\},$$

bezüglich

$$13)\quad S_1 = \frac{h}{3}\Big\{y_0 - y_{2n} + 2\sum_{k=1}^{k=n}(y_{2k} + 2\,y_{2k-1})\Big\}.$$

Für die Höhe η desjenigen Rechtecks, welches mit S_1 gleichen Inhalt und gleiche Grundlinie hat, gilt mithin der Ausdruck

$$14)\quad \eta = \frac{S_1}{2\,n\,h}\,.$$

Letzteren kann man, wie Nr. 9, als „Mittelwerth" benutzen.

B.

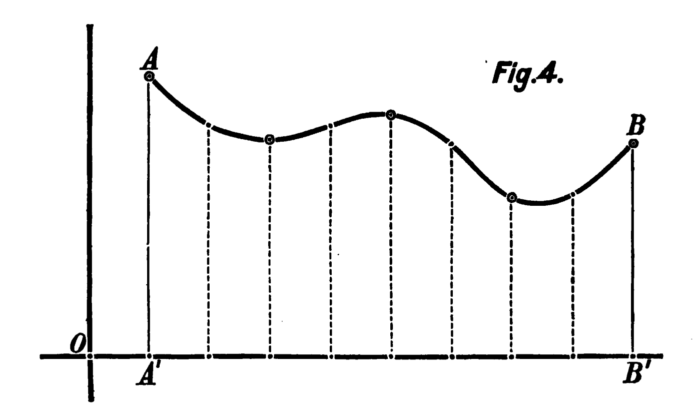
Der durch die Gleichungen Nr. 10 bis 13 ausgesprochene Satz wurde von Thomas Simpson in seinen „Mathematical dissertations on physical and analytical subjects," London, 1743, veröffentlicht*) und heisst die „Simpson'sche Regel".

Es liefert diese „Regel" eine Näherungsformel für die Berechnung des Inhaltes einer jeden Fläche $A'ABB'$ (Fig. 4) falls die begrenzende Curve AB eine ganz willkürliche Linie ist, z. B. eine mit dem Bleistift beliebig gezogene, der gar kein bestimmtes Bildungsgesetz zukommt; etwa die Kante eines Weges in einem geodätischen Risse, oder die bei der Messung der Arbeitsleistung von Maschinen durch den Stift des Dynamometers gezeichnete Linie, oder die Curve, welche man erhielt, indem man den Verlauf eines physikalischen oder chemischen Vor-

*) Wolf, Handbuch der Mathematik u. s. w., Bd. 1, S. 203.

ganges in geeigneten Zeitintervallen beobachtete und graphisch darstellte.

Man gelangt zu dem betreffenden Näherungswerthe, indem man $A'B'$ in eine hinreichend grosse gerade Anzahl gleicher



Theile theilt, die zu den Theilpunkten gehörigen Ordinaten zieht und dann die Linie AB so auffasst, als ob sie zwischen je drei im obigen Sinne neben einanderliegenden Punkten stets eine Gleichung von der Form Nr. 1 habe, also ein Parabelbogen sei.

Reichen z. B. 8 gleiche Theile hin (was die Fig. 4 darstellt), so ist, näherungsweise,

$$15)\quad S_2 = \frac{h}{3}\left\{(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right\}$$

der Inhalt der Fläche $A'ABB'$, wobei, wie vorher, h den Abstand der Ordinaten bedeutet und mit y_0 bis y_8 die Längen der letzteren bezeichnet sind.

C.

Lässt man an die Stelle der Curve $P_0 P_1 P_2 \ldots . P_{2n}$ (Fig. 3) eine gebrochene Gerade treten, setzt also die Fläche aus lauter Trapezen zusammen, so gilt für den Inhalt (näherungsweise) die Gleichung

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \ldots . + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2} h,$$

also

$$16) \quad S_1 = \frac{h}{2} \left\{ (y_0 + y_{2n}) + 2 (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots . + y_{2n-1}) \right\}$$

$$= \frac{h}{2} \left\{ y_0 + y_{2n} + 2 \sum_{k=1}^{k=2n-1} y_k \right\};$$

z. B. die Fläche $A' A B B'$ der Fig. 4 anlangend:

$$17) \quad S_2 = \frac{h}{2} \left\{ y_0 + y_8 + 2 (y_1 + y_2 + \ldots + y_7) \right\}.$$

Die Gleichung Nr. 16 führt den Namen „Trapezformel". Sie wird in der angewandten Mathematik mindestens eben so oft benutzt, als die Simpson'sche Regel, ist aber meist ungenauer als letztere und dabei für das Zahlenrechnen nicht einfacher.

D.

Für die näherungsweise Berechnung des Inhaltes ebener Flächen und für die damit zusammenhängende Ableitung von Mittelwerthen sind ausser den unter A bis C behandelten Formeln noch andere in Gebrauch. Die Simpson'sche Regel ist jedoch (in Bezug auf Einfachheit und Genauigkeit) allen vorzuziehen, falls eine gerade Anzahl gleichbreiter Streifen benutzt werden kann. Ist Letzteres unzulässig, so verwendet man am besten die unter C besprochene Trapezformel.

Näheres — auch bezüglich der Fehlergrenzen der betreffenden Formeln — findet man in der Abhandlung, welche Ax. Harnack diesen Gegenstand anlangend im 28. Bande des „Civilingenieurs" veröffentlicht hat, dadurch über eine grössere von P. Mansion herrührende Arbeit berichtend.

E.

Das unter A bis C Vorausgehende möge zur Lösung folgender Aufgaben Benutzung finden:

I. Um für eine anzugebende Geschwindigkeit v einen „Mittelwerth" μ zu erhalten, mass man v in Abständen von je 3 Sekunden und erhielt, in Metern ausgedrückt, der Reihe nach die Werthe

$$v_0 = 1{,}73, \quad v_1 = 1{,}81, \quad v_2 = 1{,}92,$$
$$v_3 = 1{,}78, \quad v_4 = 1{,}85.$$

Es soll der **Mittelwerth** μ sowohl nach der **Simpson'schen Regel**, als auch nach der **Trapezformel** berechnet werden.

II. Auf dieselbe Weise soll man den **Inhalt** V **eines Gefässes** $ABCD$ (Fig. 5) bestimmen, welches die Form eines Umdrehungskörpers hat, dessen Achse MN ist. Dabei sei

$$MN = 1{,}2 \text{ Meter.}$$

Ferner mögen die bei AD und so fort bis BC in gleichen Abständen vorhandenen inneren Durchmesser die in Metern ausgedrückten Werthe

$$d_0 = 0{,}42, \quad d_1 = 0{,}46,$$
$$d_2 = 0{,}48, \quad d_3 = 0{,}45,$$
$$d_4 = 0{,}40, \quad d_5 = 0{,}41,$$
$$d_6 = 0{,}47$$

haben und V soll, auf 5 Decimalstellen abgerundet, als Bruchtheil des Cubikmeters verlangt sein.

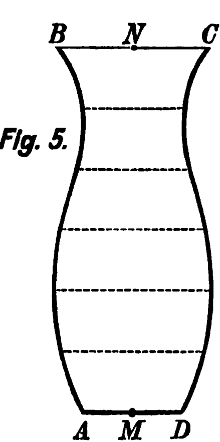


Fig. 5.

Lösung. I. Die Werthe der Geschwindigkeiten (v) als diejenigen der Ordinaten (y) auffassend, erhält man nach der Simpson'schen Regel (Gl. 10—14) für den gesuchten Mittelwerth:

18) $$\mu_1 = 1{,}815 \text{ Meter;}$$

hingegen nach der Trapezformel (Gl. 16):

19) $$\mu_2 = 1{,}825,$$

während das arithmetische Mittel der v den Betrag 1,818 hat.

II. Bezüglich des zu berechnenden Volumens giebt der erste der genannten Sätze (indem man die Querschnittsinhalte als die y-Werthe ansieht):

20) $$V_1 = 0{,}18377 \text{ Cubikmeter,}$$

der zweite:

21) $$V_2 = 0{,}18393.$$

F.

Zum Zwecke weiterer Ausnutzung des unter A bis D Stehenden, erwäge man:

I. ob die entwickelten Gleichungen auch dann noch gelten, wenn die untere Begrenzung der betreffenden Fläche nicht mehr die X-Achse ist, sondern eine Curve, wie $P_0 P_{2n}$ in der Fig. 3, oder AB in Fig. 4;

II. in welcher Weise die Formeln 10—13 und 16 zur Berechnung von Näherungswerthen bestimmter Integrale dienen können;

III. wie man sie für Schwerpunktsbestimmungen (besonders bei ungesetzmässiger Begrenzung) anzuwenden vermag;

IV. ob und in welcher Art die wissenschaftliche Erdkunde von jenen Formeln (10—13, oder 16) Gebrauch machen kann.

Was Nr. II anlangt, so lassen sich mittelst der genannten Gleichungen sofort Näherungsformeln für

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

angeben, weil das bestimmte Integral bekanntlich als Flächeninhalt aufgefasst werden kann (wobei die Stetigkeit der betreffenden Function gehörig zu berücksichtigen ist). Man sehe hierüber, wenn nöthig: Weisbach, theoretische Mechanik, Seite 50 und 51 der 5. Auflage, wo auch ein Zahlenbeispiel, nämlich

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

sich vorfindet.

Der § 127 desselben Werkes möge Verwendung finden, falls man bezüglich der unter Nr. III genannten Schwerpunktsermittelungen Belehrung braucht.

Nr. IV anlangend empfiehlt sich die Benutzung von: Günther, Geophysik, Bd. 1, S. 293.

§ 6. Einschaltungsverfahren.

(Interpolationen.)

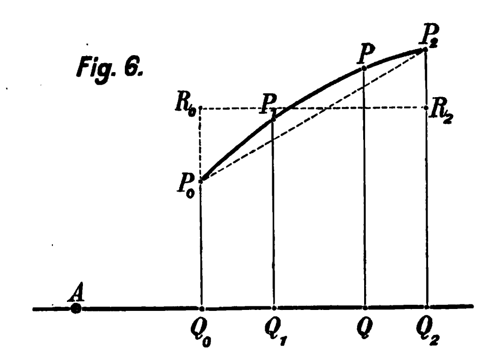
A.

Bei Untersuchungen, welche den Naturwissenschaften, der Technik oder anderen Gebieten der angewandten Mathematik angehören, tritt oft der folgende Fall ein:

Man kennt, von irgendwo her, etwa aus Beobachtungen, drei zusammengehörige Werthe

$$x_0 \text{ und } y_0,\ x_1 \text{ und } y_1,\ x_2 \text{ und } y_2$$

zweier veränderlichen Grössen x und y; man weiss ferner (oder



man nimmt aus genügend guten Gründen an), dass in Bezug auf das unbekannte Gesetz

1) $$y = f(x),$$

nach welchem y von x abhängt, die allgemeine Form

2) $$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

als geltend vorausgesetzt werden darf, wobei α, β und γ unbekannte Coefficienten sind. (Vergleiche § 21 des I. Theiles dieses Werkes.)

Im Sinne der analytischen Geometrie ausgedrückt, heisst Das (unter Benutzung eines rechtwinkligen Achsensystems): Die Lage dreier Punkte, P_0, P_1 und P_2, siehe Fig. 6, ist gegeben, man kennt nämlich (bezogen auf irgend einen Ursprung A) die Coordinaten

$$A\,Q_0 = x_0 \text{ und } Q_0\,P_0 = y_0\,,$$
$$A\,Q_1 = x_1 \text{ und } Q_1\,P_1 = y_1\,,$$
$$A\,Q_2 = x_2 \text{ und } Q_2\,P_2 = y_2\,;$$

ferner weiss man von der unbekannten Gleichung der Linie $P_0 P_1 P_2$, dass für sie die allgemeine Form Nr. 2 vorausgesetzt werden darf (was, bei geringen Krümmungen, mindestens näherungsweise zulässig ist).

Es handelt sich nun

I. darum, unter Ausnutzung der obigen drei Werthepaare und unter Festhaltung der Voraussetzung Nr. 2, den zwischen x und y bestehenden mathematischen Zusammenhang zu berechnen, also diejenige Gleichung (Interpolationsformel) zu ermitteln, welche das zu irgend einem Werthe
$$x = A\,Q$$
der unabhängigen Veränderlichen gehörende y (d. i. QP) liefert;

ferner braucht man, in demselben Sinne,

II. einen Mittelwerth aller derjenigen (unendlich vielen) y, welche zwischen y_0 und y_2 liegen, nämlich die Höhe
$$y_m = Q_0\,R_0$$
desjenigen Rechtecks $Q_0\,R_0\,R_2\,Q_2$, welches denselben Inhalt hat, wie die Fläche $Q_0\,P_0\,P_1\,P\,P_2\,Q_2$.

Lösung. I. Wir legen, zur Vereinfachung, den Coordinatenanfang von A nach Q_0, verkürzen mithin alle x um den Werth x_0.

Ferner bezeichnen wir $Q_0\,Q_1$ mit ξ_1, $Q_0\,Q_2$ mit ξ_2, $Q_0\,Q$ mit ξ, so dass also

3) $$\xi_1 = x_1 - x_0\,,$$
4) $$\xi_2 = x_2 - x_0\,,$$
5) $$\xi = x - x_0\,.$$

Die Voraussetzung Nr. 2 hat dann die Form

6) $$y = \alpha + \beta\,\xi + \gamma\,\xi^2,$$

und es bestehen für die Coefficienten α, β, γ die Bedingungsgleichungen

7) $$y_0 = \alpha,$$
8) $$y_1 = \alpha + \beta\,\xi_1 + \gamma\,\xi_1^2,$$
9) $$y_2 = \alpha + \beta\,\xi_2 + \gamma\,\xi_2^2.$$

Aus denselben folgen die Werthe

10) $$\alpha = y_0\,,$$

$$11)\qquad \beta = \frac{(y_1 - y_0)\,\xi_2^2 - (y_2 - y_0)\,\xi_1^2}{(\xi_2 - \xi_1)\,\xi_2\,\xi_1},$$

$$12)\qquad \gamma = \frac{(y_1 - y_0)\,\xi_2 - (y_2 - y_0)\,\xi_1}{(\xi_1 - \xi_2)\,\xi_1\,\xi_2}.$$

Die gesuchte Einschaltungsgleichung (Interpolationsformel) lautet mithin:

$$13)\qquad y = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)\,\xi_2^2 - (y_2 - y_0)\,\xi_1^2}{(\xi_2 - \xi_1)\,\xi_1\,\xi_2}\,\xi + \frac{(y_1 - y_0)\,\xi_2 - (y_2 - y_0)\,\xi_1}{(\xi_1 - \xi_2)\,\xi_1\,\xi_2}\,\xi^2,$$

wobei ξ, ξ_1 und ξ_2 die durch Nr. 3, 4 und 5 angegebene Bedeutung haben.

II. Bezeichnet man mit S den Inhalt der Fläche $Q_0 P_0 P_1 P P_2 Q_2$, so ist der gesuchte Mittelwerth bestimmt durch die Gleichung

$$14)\qquad y_m = \frac{S}{\xi_2},$$

wobei

$$15)\qquad S = \int_0^{\xi_2} (\alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2)\,d\xi.$$

Aus Nr. 15 folgt, wenn man die Integration ausführt, die Werthe Nr. 10—12 einsetzt und dann die Glieder in geeigneter Weise anordnet,

$$16)\ S = \left\{ \frac{y_0 + y_2}{2} + \frac{(y_1 - y_0)\,\xi_2 - (y_2 - y_0)\,\xi_1}{6\,\xi_1\,(\xi_2 - \xi_1)}\,\xi_2 \right\} \xi_2$$

als Inhalt der Fläche $Q_0 P_0 P_1 P P_2 Q_2$.

Hierin bedeutet nach dem Ausmultipliciren mit ξ_2, das erste Glied die Fläche des Trapezes $Q_0 P_0 P_2 Q_2$, also das zweite diejenige Ergänzung, welche der genannten Trapezfläche beigefügt werden muss, nämlich den Inhalt des Segmentes $P_0 P_1 P P_2 P_0$.

Für den gesuchten Mittelwerth hat man nun, laut 14 und 16,

$$17)\quad y_m = \frac{y_0 + y_2}{2} + \frac{(y_1 - y_0)\,\xi_2 - (y_2 - y_0)\,\xi_1}{6\,\xi_1\,(\xi_2 - \xi_1)}\,\xi_2.$$

Er hat die Form des mit einer Berichtigung versehenen arithmetischen Mittels der Werthe y_0 und y_2.

B.

Das unter A für y und y_m Gefundene möge nun angewendet werden

I. auf den besonders oft vorkommenden Fall, in welchem y_1 gleich weit von y_0 und y_2 absteht, also $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_2$ ist;

II. auf den, dass sich die Unterschiede $y_2 - y_0$ und $y_1 - y_0$ zu einander verhalten, wie $x_2 - x_0$ zu $x_1 - x_0$.

Lösung. Im ersten Falle, also wenn die zu berücksichtigenden Beobachtungen oder Messungen gleich weit von einander abstehen, geht die Einschaltungsgleichung Nr. 13 über in:

$$18)\quad y = y_0 - \frac{3y_0 - 4y_1 + y_2}{\xi_2}\xi + 2\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{\xi_2^2}\xi^2,$$

die Mittelwerthsgleichung Nr. 17 in:

$$19)\qquad y_m = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}.$$

Letztere stimmt, wie es sein muss, überein mit der Gleichung 9 des § 5, wo y_m mit η bezeichnet wurde.

Im zweiten Falle lautet die Interpolationsformel:

$$20)\qquad y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\xi_1}\xi,$$

die Mittelwerthsgleichung:

$$21)\qquad y_m = \frac{y_0 + y_2}{2}.$$

Beide Ausdrücke werden sofort durch die Anschauung bestätigt, wenn man beachtet, dass in diesem II. Falle die drei Punkte P_0, P_1 und P_2 in einer geraden Linie liegen.

C.

Für die Praxis der Einschaltungen möge noch auf Folgendes hingewiesen werden:

I. Von den Gleichungen Nr. 20 und 21 ist auch Gebrauch zu machen, wenn nur zwei Werthepaare vorliegen (nicht deren drei). Fälle dieser Art sehe man z. B. in dem „Leitfaden der praktischen Physik“ von Kohlrausch, auf S. 27 und 227 der fünften, oder auf S. 19, 24, 25 und 228 der sechsten Auflage.

II. Will man das Einschalten unter Berücksichtigung dreier Werthepaare durch Construction ausführen, statt durch Rechnung, so thut man meist wohl, an Stelle von Nr. 2 die Annahme zu benutzen, dass die Punkte P_0, P_1 und P_2 auf einem Kreisbogen liegen (statt auf einer Parabel). Letzterer ist bekanntlich sehr bequem construirbar.

III. Wer Näheres über Einschaltungen kennen zu lernen wünscht, der benutze: Weisbach, theoretische Mechanik, Seite 71—74 der 5. Auflage; oder: Kunzek, Studien aus der höheren Physik, Abschnitt I, § 3—5, wo sich (auf S. 12) ein die Dichtigkeit des Wassers betreffendes Zahlenbeispiel vorfindet. Ferner beachte man, graphisches Interpoliren anlangend: die im „Literaturverzeichniss" (am Ende dieses Buches) genannte Arbeit von R. Mehmke.

§ 7. Mittelwerthe von Grössen, welche von nur einer Veränderlichen abhängen*).

A.

Eine veränderliche Grösse y (z. B. eine Temperatur, eine Geschwindigkeit, oder eine Kraft) möge nach irgend einem Gesetze von einer anderen Veränderlichen x (z. B. von der Zeit) abhängen; es sei also

1) $$y = f(x).$$

Denkt man sich x und y als rechtwinklige Coordinaten, so bedeutet die Gleichung Nr. 1 bekanntlich eine ebene Curve. Sie möge in der Fig. 7 (S. 24) durch APB dargestellt sein.

Der unabhängigen Veränderlichen x (also z. B. der Zeit) soll hierbei ein bestimmter Spielraum, etwa der von

$$x_0 = OA' \text{ bis } x_1 = OB',$$

vorgeschrieben sein; ferner möge vorausgesetzt werden, dass die Function $f(x)$ innerhalb desselben eindeutig und stetig (continuirlich) sei.

Jenen Spielraum wollen wir uns in n gleiche Theile getheilt denken, deren jeder den Werth Δx haben möge (z. B. werde die Zeit in Sekunden getheilt gedacht).

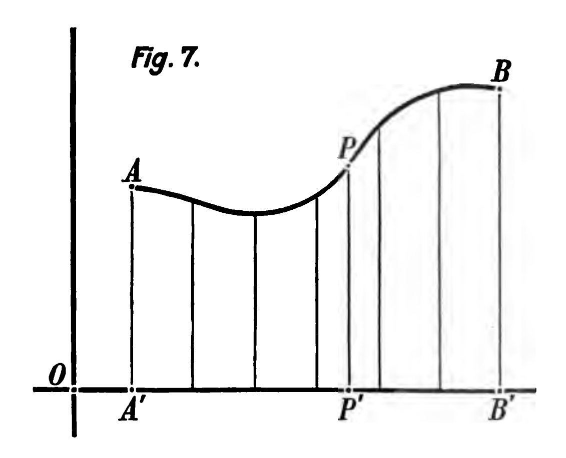
*) Man vergleiche § 29 und 31.

Zu dem Anfange eines jeden derartigen Theiles Δx gehört dann ein Werth von y, welcher leicht der Gleichung 1 entnommen werden kann.

Man berechne nun

I. das arithmetische Mittel, μ, dieser n Werthe von y unter der Voraussetzung, dass n eine endliche Zahl sei;

II. unter der Annahme, dass n unendlich gross, also Δx unendlich klein werde, es sich mithin um das arithmetische Mittel aller derjenigen y-Werthe handle, welche innerhalb des für x vorgeschriebenen Spielraumes liegen.



Lösung. I. Die zu den Anfangspunkten der n Theile des Spielraumes

$$x_1 - x_0 = A'B'$$

gehörenden Werthe von y sind, laut Gleichung 1:

$$f(x_0),\ f(x_0 + \Delta x),\ f(x_0 + 2\,\Delta x),\ \ldots\ldots f(x_0 + [n-1]\,\Delta x).$$

Das gesuchte arithmetische Mittel derselben ist mithin

2)
$$\mu = \frac{f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 + 2\Delta x) + \ldots + f(x_0 + [n-1]\Delta x)}{n}.$$

II. Für $n = \infty$ wird μ zu dem Grenzwerthe der rechten Seite der Gleichung 2, also

3)
$$\mu = \operatorname{Lim} \frac{f(x_0) + f(x_0 + \varDelta x) + f(x_0 + 2\varDelta x) + \ldots + f(x_0 + [n-1]\varDelta x)}{n},$$
$$n = \infty.$$

Da nun
$$n \varDelta x = x_1 - x_0$$
ist, mithin
$$n = \frac{x_1 - x_0}{\varDelta x},$$
so entsteht, wenn man das einsetzt,

4) $$\mu = \operatorname{Lim} \frac{\{f(x_0) + f(x_0 + \varDelta x) + \ldots + f(x_0 + [n-1]\varDelta x)\}\varDelta x}{x_1 - x_0},$$
$$n = \infty.$$

Aus Nr. 3 wird also, zufolge des Begriffes des bestimmten Integrals,

5) $$\mu = \frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} y\,dx,$$

oder

6) $$(x_1 - x_0)\,\mu = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Da das rechts stehende Integral den Inhalt der Fläche $A'APBB'$ bedeutet und $x_1 - x_0$ die Länge ihrer Grundlinie, so hat man durch Nr. 5 oder 6 den Satz: das (im Sinne des Vorhergehenden genommene) arithmetische Mittel, der unendlich vielen y-Werthe, welche innerhalb des von x_0 bis x_1 reichenden Spielraumes der unabhängigen Veränderlichen (x) liegen, ist gleich der Höhe desjenigen Rechtecks, welches jenen Spielraum zur Grundlinie und mit der über ihm liegenden Curvenfläche ($A'APBB'$) gleichen Inhalt hat.

Die im Vorausgehenden behandelte Herleitung eines derartigen „Mittelwerthes“ erfordert mithin stets eine Flächeninhaltsbestimmung (Quadratur) *). Wenn es sich z. B. unter

*) Wer kennen lernen will, wie sich Mittelwerthe auf elementare Weise (ohne Integralrechnung) herleiten lassen, der studire: Schlömilch, algebraische Analysis, Cap. IV.

Zugrundelegung des Mariotte'schen Gesetzes, um die Berechnung eines mittleren Gasvolumens handelt, so ist (im Wesentlichen) diejenige Inhaltsermittelung auszuführen, welche im § 3 unter I. besprochen wurde.

B.

Im geometrischen Sinne genommen, giebt die Gleichung Nr. 5 das arithmetische Mittel derjenigen Ordinaten eines begrenzten Curvenbogens (AB der Fig. 7), welche zu unendlich vielen gleichen Theilen der auf die x-Achse bezogenen Projection ($A'B'$) jenes Bogens gehören. Für die Ordinaten, welche gleichen Theilen des Bogens zukommen, ergiebt sich im Allgemeinen ein von dem ersten abweichender Werth des arithmetischen Mittels.

So ist es auch in anderen Fällen. Soll daher der „Mittelwerth" irgend einer Grösse eindeutig bestimmt sein, so muss man sagen, in welchem Sinne er gemeint wird, muss ihn also genau definiren. Näheres hierüber enthalten die folgenden Paragraphen (Nr. 8—11), welche Mittelwerthe aus verschiedenen Gebieten der Mechanik, Physik und Chemie, Geometrie und Geographie*) betreffen.

§ 8. Mittelwerth eines Verticaldruckes und eines Horizontalschubes.

A.

Zunächst möge das Vorhergehende Anwendung finden zur Berechnung der Mittelwerthe D_μ und S_μ derjenigen Verticaldrücke (D) und Horizontalschübe (S), welche die unveränderliche Kraft K (Fig. 8, S. 27) erzeugt, wenn sie nach und nach unter allen Winkeln, die zwischen $w = 0$ und $w = 90^0$ liegen, gegen die feste Ebene EE wirkt.

Lösung. Es ist der Verticaldruck

1) $$D = K \sin w,$$

*) Ueber das Vorkommen von Mittelwerthen in der wissenschaftlichen Erdkunde (mittlere Thalhöhen u. s. w.) sehe man auch: Günther, Geophysik, Band 2, S. 111—112, 528—529.

Ferner über die Mittelwerthe der Krümmung von Curven und Flächen: die im „Literaturverzeichniss" genannte Abhandl. von Czuber.

(was der Gleichung Nr. 1 des § 7 entspricht). Demgemäss

$$D_\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \sin w \, dw,$$

also

2) $$D_\mu = \frac{2}{\pi} K,$$

oder, auf drei Decimalstellen abgerundet,

3) $$D_\mu = 0{,}637 \, K.$$

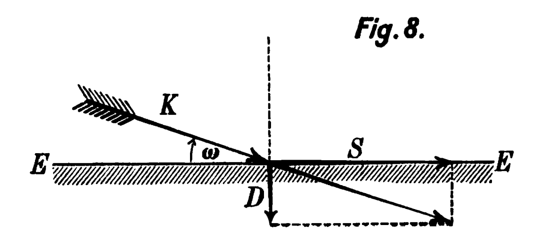


Fig. 8.

Ferner ist

$$S_\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \cos w \, dw,$$

folglich

4) $$S_\mu = \frac{2}{\pi} K.$$

Die beiden Mittelwerthe sind also einander gleich (was auch der Anschauung entnommen werden kann); jeder derselben beträgt nahezu 64 Procent, oder beiläufig $^7/_{11}$ der Kraft K.

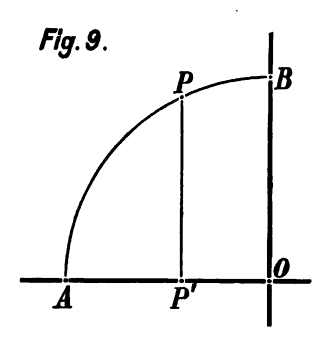
B.

Ueberträgt man das unter Nr. 2 und 3 Gefundene aus der Mechanik in die Geometrie, so giebt es den Satz: Das arithmetische Mittel μ der unendlich vielen Or-

dinaten eines auf ein rechtwinkliges System bezogenen Kreisquadranten (APB, Fig. 9) ist gleich $\frac{2}{\pi}$ des Halbmessers;

5) $$\mu = \frac{2}{\pi} a = 0{,}637\, a\text{*)}.$$

Dabei sind diejenigen Ordinaten gemeint, welche zu den Punkten gehören, die sich ergeben, wenn man die Peripherie des Viertelkreises in n gleiche Theile theilt und n ins Unendliche wachsen lässt.



Meint man hingegen diejenigen Ordinaten, welche den Punkten zukommen, die sich herausstellen, wenn der Halbmesser OA in n gleiche Theile getheilt wird, so ist das Mittel μ_1 bestimmt durch die Gleichung

$$\mu_1 = \frac{1}{a-0} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Man hat also dann:

6) $$\mu_1 = \frac{\pi}{4} a = 0{,}785\, a.$$

Der Unterschied dieser beiden Mittel ist sehr erheblich, nämlich:

7) $$\mu_1 - \mu = 0{,}148\, a,$$

beinahe 15 Procent des Halbmessers. Oder es ist das Verhältniss

8) $$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{637}{785};$$

also

9) $$\mu \mathrel{=\!\!|\!\!=} 81\,\% \text{ des } \mu_1\text{**)}.$$

*) In der Höhe $\frac{2}{\pi} a$ liegt bekanntlich auch der Schwerpunkt des Viertels der Kreisperipherie.

** Durch das Zeichen =|= soll hier und im Folgenden „nahezu gleich" ausgedrückt sein.

Es empfiehlt sich, die Richtigkeit der Gleichungen 5 und 6 zu veranschaulichen, indem man

I. die Peripherie APB,

II. den Halbmesser OA

des Viertelkreises in n (z. B. 8, oder 16) gleiche Theile theilt, die zugehörigen Ordinaten zeichnet, ihre Längen graphisch addirt und die so erhaltenen zwei Ordinatensummen vergleicht.

Man führe Das durch für $n = 8$ und $n = 16$, dabei etwa $a = 1$ Decimeter nehmend. Im ersten Falle ergiebt sich für den Unterschied $\mu_1 - \mu$, bei sorgfältigem Zeichnen, ungefähr 13,6, im zweiten Falle etwa 14,4 Procent des Halbmessers. Die letztgenannte Zahl kommt dem durch Gleichung 7 angegebenen Werthe schon ziemlich nahe.

C.

Ist für den Winkel w, unter welchem die Kraft K wirkt, allgemeiner der von Null bis w_1 reichende Spielraum vorgeschrieben (statt 0 bis 90°, unter A), so sind die Mittelwerthe D_μ und S_μ selbstverständlich nicht mehr gleich. Man berechne dieselben für diesen allgemeineren Fall und zeige, dass in den Ergebnissen die Gleichungen 2 und 4 enthalten sind.

Lösung. Es ergiebt sich:

10) $$D_\mu = \frac{1 - \cos w_1}{w_1} K$$

und

11) $$S_\mu = \frac{\sin w_1}{w_1} K.$$

Für $w_1 = \frac{\pi}{2}$ gehen diese Werthe in Nr. 2 und 4 über.

§ 9. Der mittlere Abstand einer Stelle der Erdoberfläche von allen Punkten des zugehörigen Meridians oder Parallelkreises.

A.

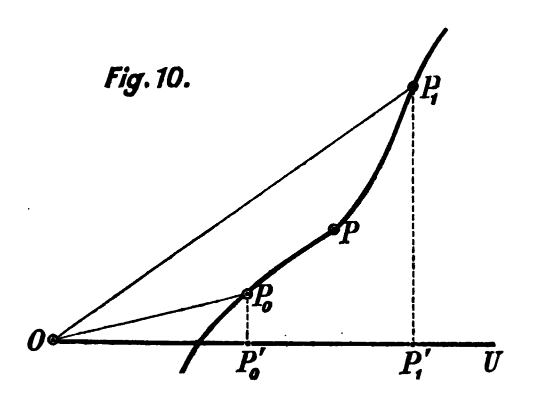
Wird ein bestimmt begrenzter Bogen $P_0 P_1$ (Fig. 10, S. 30) einer ebenen Curve in n gleiche Theile getheilt und jeder Theilpunkt mit einem festen Punkte O geradlinig verbunden, werden ferner die Längen dieser Verbindungsgeraden mit $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ bezeichnet, so ist der für

$$n = \infty$$

vorliegende Grenzwerth des arithmetischen Mittels

$$\frac{r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}}{n}$$

jener Strecken eine mittlere Entfernung des Bogens $P_0 P_1$ von dem festen Punkte O *).



Man nehme O als Pol, irgend eine feste Gerade OU als Achse eines Polarcoordinatensystems, bezeichne den Leitstrahl des allgemeinen Bogenpunktes P mit r, die zugehörige Anomalie mit θ, die zu P_0 und P_1 gehörenden Anomalien mit θ_0, bezüglich θ_1, die Bogenlängen $P_0 P$ und $P_0 P_1$ mit s und s_1.

Sodann drücke man jene „mittlere Entfernung“, welche ϱ heissen möge, durch ein bestimmtes Integral aus.

Lösung. Es ist

1) $$\varrho = \mathrm{Lim} \frac{r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1}}{n}, \quad n = \infty.$$

Wird die Länge eines der n gleichen Theile des Bogens $P_0 P_1$ mit Δs_1 bezeichnet, so hat man

2) $$n = \frac{s_1}{\Delta s_1}.$$

*) Wenn für die r ein anderes Vertheilungsgesetz vorgeschrieben wird (z. B. Gleichheit der Winkel, statt Gleichheit der Bogenlängen), so ergiebt sich (im Allgemeinen) auch ein anderer Mittelwerth. (Vergleiche § 7, B.)

Das giebt:

3) $$\varrho = \text{Lim} \frac{r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1}}{s_1} \cdot \varDelta s_1, \; n = \infty.$$

Im Zähler steht hier (da n unendlich gross, also $\varDelta s_1$ unendlich klein ist) eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Theilen, deren jeder die allgemeine Form $r\,ds$ hat. Mithin ist Nr. 3 gleichbedeutend mit

4) $$\varrho = \frac{1}{s_1} \int_0^{s_1} r\,ds,$$

was man auch in der Form

5) $$\varrho = \frac{1}{s_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

geben kann, wobei r' den Differentialquotienten $\frac{dr}{d\theta}$ bedeutet, r in der Form $f(\theta)$ als bekannt vorausgesetzt sein möge und angenommen werden soll, dass die Function f innerhalb der Grenzen θ_0 und θ_1 stetig und eindeutig sei.

Die Gleichungen 4 und 5 geben (unter den genannten Voraussetzungen) den mittleren Abstand des Bogens $P_0 P_1$ von dem festen Punkte O, oder den Mittelwerth der Leitstrahllänge aller Punkte von $P_0 P_1$ und zwar für jede auf Polarcoordinaten bezogene Linie.

Nr. 4 stimmt im Wesentlichen überein mit der Gleichung 5 des § 7, welche, geometrisch aufgefasst, den mittleren Abstand einer Curve von einer Geraden (statt von einem Punkte) angiebt.

B.

In manchen Fällen sind für die Herleitung des Mittelwerthes ϱ die Polarcoordinaten weniger vortheilhaft als die rechtwinkligen.

Es möge deshalb die Formel Nr. 5 für die Letztgenannten umgestaltet werden, wobei OU (Fig. 10) die Richtung der positiven x sein soll und O der Ursprung; ferner

$$y = f(x)$$

die Curvengleichung, die Function f aber stetig innerhalb der Grenzen

$$OP_0' = x_0 \text{ und } OP_1' = x_1.$$

Lösung. Die Formel Nr. 5 geht über in

$$6)\qquad \varrho = \frac{1}{s_1}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}\,dx,$$

wobei y' den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ bedeutet.

C.

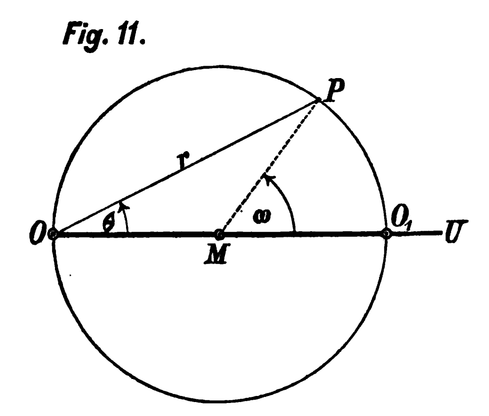
Es möge nun, im Sinne des unter A und B Vorhergehenden, die Aufgabe gestellt werden, zu berechnen

I. den mittleren Abstand ϱ irgend eines Punktes O der Erdoberfläche von allen Punkten seines Meridians und zwar bis auf drei Decimalstellen des Halbmessers a der kugelförmig vorausgesetzten Erde;

II. denjenigen Winkel θ_ϱ (auf ganze Minuten abgerundet), welchen eine von O aus gezogene Sehne von der Länge ϱ mit dem zu O gehörenden Erddurchmesser bildet.

Lösung. I. Wir nehmen den betreffenden Punkt als Pol, die Richtung OM (Fig. 11) des zugehörigen Erddurchmessers als

Fig. 11.



Polarachse und ziehen (aus naheliegendem Grunde) nur die eine Hälfte des Meridians in Betracht.

Dann tritt an die Stelle der Gleichung 5:

7) $$\varrho = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta,$$

wobei

8) $$r = 2 a \cos\theta$$

ist.

Hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{4a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta,$$

also

9) $$\varrho = \frac{4}{\pi} a,$$

oder, auf drei Decimalstellen abgerundet,

10) $$\varrho = 1{,}273\, a.$$

Das enthält den Satz: Der mittlere Abstand ϱ ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang dem Vierfachen des Erddurchmessers gleichkommt.

II. Für den Winkel θ_ϱ, unter welchem ϱ gegen den Durchmesser $O O_1$ (Fig. 11) geneigt ist, ergiebt sich leicht

11) $$\theta_\varrho = 50^0\, 28'.$$

D.

I. Mit dem durch die Gleichung Nr. 9 erhaltenen mittleren Meridianabstande vergleiche man diejenigen Werthe, μ und μ_1, welche in den Gleichungen 5 und 6 des § 8 enthalten sind. Letztere geben (unter zwei verschiedenen Voraussetzungen) den mittleren Abstand eines Meridians von einem seiner Durchmesser, also von einer Geraden, während durch Gleichung 9 der mittlere Abstand von einem Punkte (und zwar von einem solchen des Meridians selbst) gegeben ist.

II. Geht man zur Ableitung des Werthes 9 von der Gleichung 4 aus, statt von Nr. 5, so ergiebt sich:

12) $$\varrho = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi a} r\, ds,$$

wobei nun r als $\varphi(s)$ angegeben werden muss, also OP (Fig. 11) als Function des Bogens $O_1 P$. Unter Benutzung der Beziehung

$$13) \qquad s = aw = 2a\theta$$

führt das auf die Gleichung

$$14) \qquad \varrho = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi a} \cos\frac{s}{2a}\,ds$$

und von dieser auf Nr. 9.

Man unterlasse nicht, das hier Angedeutete vollständig durchzuführen.

III. Ferner zeige man, dass sich — und zwar auf sehr einfache Weise — der Werth 9 ableiten lässt, wenn für die Gleichung Nr. 4 der Centriwinkel w (Fig. 11) als unabhängige Veränderliche benutzt wird. Man kommt hierbei auf

$$15) \qquad \varrho = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{w}{2}\,dw$$

und damit wieder auf Nr. 9.

IV. Endlich möge empfohlen werden, die Gleichungen 10 und 11 auf dem Wege des Construirens zu prüfen; Nr. 10, indem man den Halbkreis OPO_1 (Fig. 11) in eine hinreichende Anzahl gleicher Theile (zunächst etwa 8, oder 16) theilt und die zugehörigen Strahlen (OP) graphisch addirt; Nr. 11 durch Benutzung eines Transporteurs.

E.

Wer sich eingehender mit Untersuchungen beschäftigen will, welche den mittleren Abstand einer Linie von einem Punkte betreffen, der benutze folgende Literatur:

Drobisch, über die mittleren Radien u. s. w. (Siehe „Literaturverzeichniss“).

Schlömilch, Uebungsbuch, Theil II, § 33.

Bermann, zur Lehre vom mittleren Radius. Liegnitz, 1888. (Diese Schrift behandelt mittlere Radien unter Zugrundelegung von vier verschiedenen Vertheilungsgesetzen der Strahlen.)

Czuber, geometrische Wahrscheinlichkeiten....; 1884. (Die Seiten 184—244 enthalten sehr viele Sätze und Aufgaben bezüglich geometrischer Mittelwerthe.)

§ 10. Mittlere Geschwindigkeiten.

A.

Ein Punkt möge eine im Allgemeinen krummlinige Bahn, von der (als eine Veränderliche aufzufassenden) Länge s, in der Zeit t durchlaufen. Seine Geschwindigkeit v soll hierbei veränderlich sein, nämlich entweder nach irgend einem bestimmten Gesetze abhängen von der verflossenen Zeit, oder nach einem anderen Gesetze von dem zurückgelegten Wege; es soll also v bekannt sein in der Form $f(s)$, aber auch in der Form $\varphi(t)$.

Denkt man sich dann die Bahnlänge s in n gleiche Theile, jeden von der Grösse Δs, getheilt und bezeichnet die an den Anfangspunkten dieser Theile herrschenden Geschwindigkeiten mit $v_1, v_2, \ldots. v_n$, so ist die „mittlere Geschwindigkeit“, welche μ_s heissen möge, naturgemäss definirt durch die Gleichung

$$1) \qquad \mu_s = \frac{v_1 + v_2 + \ldots. + v_n}{n}, \; n = \infty,$$

nämlich als Grenzwerth des arithmetischen Mittels der sämmtlichen v.

Denkt man sich hingegen die zur Durchlaufung von s nöthig gewesene Zeit t in n gleiche Theile, jeden von der Grösse Δt, getheilt und nennt die an den Anfängen dieser Zeitabschnitte herrschenden Geschwindigkeiten $v'_1, v'_2, \ldots. v'_n$, so definirt die Gleichung

$$2) \qquad \mu_t = \frac{v'_1 + v'_2 + \ldots. + v'_n}{n}, \; n = \infty,$$

in natürlicher Weise die „mittlere Geschwindigkeit“ (welche hier μ_t genannt worden ist).

Man leite nun

I. aus Nr. 1 und 2 Formeln ab, welche μ_s und μ_t durch je ein bestimmtes Integral ausdrücken;

hierauf wende man

II. diese Formeln an auf den freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit; bestätige auch hierfür die Ergebnisse durch eine graphische Darstellung, zeichne nämlich die beiden Linien, welche die Fallgeschwindigkeit als Function der Zeit, bezüglich als Function des zurückgelegten Weges darstellen, beides für eine ganz bestimmte Zeit, etwa für $t = 4$ Sekunden.

Lösung. I. Es ist (man vergleiche § 7)

3) $$\mu_s = \text{Lim} \frac{v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n}{s} \Delta s,$$

also

4) $$\mu_s = \frac{1}{s} \int_0^s v\, ds,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass v abhängig vom zurückgelegten Wege, mithin in der Form

5) $$v = f(s)$$

gegeben sei, daher statt Nr. 4

6) $$\mu_s = \frac{1}{s} \int_0^s f(s)\, ds$$

geschrieben werden kann.

Hingegen ist

7) $$\mu_t = \text{Lim} \frac{v'_1 + v'_2 + \ldots\ldots + v'_n}{t} \Delta t,$$

also

8) $$\mu_t = \frac{1}{t} \int_0^t v\, dt;$$

dabei

9) $$v = \varphi(t),$$

mithin Nr. 8 so viel wie

10) $$\mu_t = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(t)\, dt.$$

Die Gleichungen 8 und 10 definiren die „mittlere Geschwindigkeit“ μ_t in der in der Mechanik allgemein

üblichen Weise*), nämlich als Höhe desjenigen Rechtecks, dessen Grundlinie die verflossene Zeit und dessen Inhalt gleich der Fläche derjenigen „Geschwindigkeitscurve“, deren Abscissen die Zeiten und deren Ordinaten die als Functionen der Zeit ausgedrückten Geschwindigkeiten sind.

Oder, was Dasselbe ist, es sagen die Gleichungen Nr. 8 und 10: die mittlere Geschwindigkeit μ_t ist diejenige Geschwindigkeit, welche vorhanden sein müsste, wenn der Weg s in der Laufzeit t gleichförmig (mit unveränderlicher Schnelle) zurückgelegt werden sollte. Die Fläche der vorgenannten Curve stellt nämlich bekanntlich den zurückgelegten Weg s dar. (Man vergleiche § 4, A.)

Hingegen geben die Gleichungen Nr. 4 und 6 die mittlere Geschwindigkeit μ_s als Höhe eines Rechtecks, dessen Grundlinie die Weglänge s und dessen Inhalt gleich der Fläche derjenigen Geschwindigkeitscurve, deren Abscissen die zurückgelegten Wege und deren Ordinaten die als Functionen des Weges ausgedrückten Geschwindigkeiten sind.

Diese durch die Gleichungen Nr. 4 und 6 gegebene Begriffserklärung der „mittleren Geschwindigkeit“ hat vielleicht für die Mechanik keinen praktischen Werth, doch hat sie theoretisches Interesse.

II. Beim freien Falle (ohne Anfangsgeschwindigkeit) ist bekanntlich

11) $$v = \sqrt{2gs}$$

und

12) $$v = gt;$$

mithin, gemäss Nr. 4,

13) $$\mu_s = \tfrac{2}{3}\sqrt{2gs};$$

hingegen, laut Nr. 8,

14) $$\mu_t = \tfrac{1}{2}gt.$$

Die eine „mittlere Geschwindigkeit“ beträgt also zwei Drittel, die andere nur die Hälfte der Endgeschwindigkeit.

Graphische Darstellung (in der durch die Aufgabe

---

*) Man vergleiche: Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte; S. 107 der ersten, oder Bd. 1, S. 193 und 194 (§ 8) der zweiten Auflage.

verlangten Weise) giebt bei μ_s als Geschwindigkeitslinie eine gemeine Parabel von der Gleichung Nr. 11; dabei

15) $$\mu_s = 26{,}16 \text{ Meter},$$

wenn

16) $$g = 9{,}81 \text{ Meter}$$

genommen wird, was bekanntlich für mittlere Breitengrade Europas Giltigkeit hat.

Für μ_t hingegen ist die Geschwindigkeitscurve eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade (Gleichung 12). Ferner ergiebt sich:

17) $$\mu_t = 19{,}62 \text{ Meter.*)}$$

B.

Da bekanntlich

$$v = \frac{ds}{dt},$$

also

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v}$$

ist, so folgt aus Nr. 8 oder 10:

18) $$\mu_t = \frac{s}{\int_0^s \frac{ds}{v}}.$$

Diese Gleichung hat zur Anwendung zu kommen, wenn v als Function des Weges, also in der Form Nr. 5, gegeben ist, man aber nicht μ_s, sondern μ_t, haben will.

Für den freien Fall giebt das:

19) $$\mu_t = \frac{s}{\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gs}}},$$

also

20) $$\mu_t = \tfrac{1}{2}\sqrt{2gs} = \tfrac{1}{2}v$$

übereinstimmend mit Nr. 14.

---

*) Es empfiehlt sich, die graphische Darstellung vollständig durchzuführen, indem man die beiden Geschwindigkeitslinien für den Zeitraum von 4 Sekunden in geeignetem Maassstabe aufzeichnet und alle Maasse einschreibt.

§ 11. Mittlere Reactionsgeschwindigkeiten chemischer Vorgänge.

A.

Es möge nun im Sinne des vorhergehenden Paragraphen die mittlere Geschwindigkeit eines chemischen Vorganges durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden

I. unter der Voraussetzung, dass die dem betreffenden Vorgange eigenthümliche Geschwindigkeit v als Function dei Zeit t, nämlich durch eine Gleichung von der Form

1) $$v = f(t)$$

bekannt sei, für die Zeit der Spielraum von t_0 bis t_1 vorliege und man das arithmetische Mittel aller derjenigen v-Werthe meint, welche zu den unendlich vielen von $t = t_0$ bis $t = t_1$ liegenden Werthen der Zeit t gehören;

II. unter der anderen Voraussetzung, dass man jene Geschwindigkeit als Function der bereits gebildeten Menge r des Reactionsproductes, also in der Form

2) $$v = \varphi(r)$$

kenne, für den von r_0 bis r_1 reichenden Spielraum den Mittelwerth von v meine und ihn definire als arithmetisches Mittel aller v-Werthe, welche den unendlich vielen von $r = r_0$ bis $r = r_1$ liegenden r-Werthen entsprechen.

Die bei I sich ergebende mittlere Reactionsgeschwindigkeit möge μ_t heissen, während die bei II geltende μ_r genannt werden soll.

Man wende dann

III. die für μ_t und μ_r gefundenen Werthe auf denjenigen besonderen Fall an, welcher im § 14 des ersten Theiles dieses Werkes unter I behandelt worden ist, nämlich auf die Lösung von Calciumcarbonat in Salzsäure.

Nachher benutze man die Ergebnisse, um für diesen besonderen Fall abzuleiten:

IV. die mittlere Reactionsgeschwindigkeit, m_t, bezüglich der ersten t Zeiteinheiten der Dauer des chemischen Vorganges, wie auch den entsprechenden Mittelwerth, m_r,

für die Bildung der ersten r Moleküle des Reactionsproduktes.

Endlich wende man das für m_t und m_r Gefundene an auf den Fall $t = \infty$.

Lösung. Die beiden Mittelwerthe sind, gemäss § 7, ausgedrückt durch die Gleichungen

3) $$\mu_t = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$$

und

4) $$\mu_r = \frac{1}{r_1 - r_0} \int_{r_0}^{r_1} \varphi(r)\, dr. *)$$

Für den in der Aufgabe genannten besonderen Fall ist, nach Theil I, Seite 22, Gleichung 3,

5) $$v = \frac{cP}{V} e^{-\frac{2ct}{V}}$$

und, nach Seite 23, Gleichung 6,

6) $$v = \frac{c}{V}(P - 2r),$$

wobei P, V und c die am Anfange des § 14 des I. Theiles angegebene Bedeutung haben.

Aus den Gleichungen Nr. 3 und 5 folgt:

7) $$\mu_t = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{cP}{V} e^{-\frac{2ct}{V}}\, dt,$$

also

8) $$\mu_t = \frac{P}{2(t_1 - t_0)} \left\{ e^{-\frac{2ct_0}{V}} - e^{-\frac{2ct_1}{V}} \right\},$$

was auch in der Form

9) $$\mu_t = \frac{v_0 - v_1}{l v_0 - l v_1}$$

gegeben werden kann, wenn man mit v_0 und v_1 die zu den Zeiten t_0 und t_1 gehörenden Reactionsgeschwindigkeiten bezeichnet (mit l den natürlichen Logarithmus).

---

*) Näheres: Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. IV, S. 520. (Abhandlung von A. Fuhrmann.)

Betreffend den unter der zweiten Voraussetzung geltenden Mittelwerth geben die Gleichungen Nr. 4 und 6:

10) $$\mu_r = \frac{c}{V}(P - r_0 - r_1).$$

Das ist, laut Nr. 6, so viel wie

11) $$\mu_r = \frac{v_0 + v_1}{2}.$$

Dieses Ergebniss wird durch die Anschauung bestätigt, wenn man beachtet, dass die Gl. 6 eine Gerade bedeutet, wenn v und r als rechtwinklige Coordinaten aufgefasst werden.

Ferner erhält man aus Nr. 8:

12) $$m_t = \frac{P}{2t}\left\{1 - e^{-\frac{2ct}{V}}\right\}$$

als die auf die ersten t Zeiteinheiten bezogene mittlere Reactionsgeschwindigkeit; hingegen, aus 10, bezüglich der Bildung der ersten r Moleküle des Chlorcalciums:

13) $$m_r = \frac{c(P - r)}{V}.$$

Für eine unendlich lange Zeit liefern diese Gleichungen die Werthe

14) $$m_t = 0$$

und (laut § 14, Nr. 1 des ersten Theiles dieses Werkes)

15) $$m_r = \frac{cP}{2V}.$$

B.

Das Ergebniss Nr. 14 ist nicht widersinnig. Es sagt nämlich nur, dass die mittlere Geschwindigkeit m_t gegen Null convergirt, wenn t ins Unendliche wächst.

Da aber m_t bekanntlich (man sehe § 7, *A*) die Höhe desjenigen Rechtecks ist, welches, bei gleicher Grundlinie, denselben Inhalt hat, wie die „Geschwindigkeitslinie" (§ 4, A), so muss es sich in der That der Null asymptotisch nähern, denn die Grundlinie (t) ist unendlich gross, der Inhalt, S_t, aber endlich, nämlich

16) $$S_t = \tfrac{1}{2} P.$$

C.

Zur weiteren Einübung des Vorhergehenden möge noch die Aufgabe gestellt werden, die mittlere Reactionsgeschwindigkeit m_t zu berechnen für den Fall, dass v nicht durch Nr. 5', sondern durch Nr. 6 gegeben sei, also m_t durch r, statt durch t (Gl. 12), auszudrücken ist.

Lösung. Man hat dann, entsprechend der Gleichung 18 des vorausgegangenen Paragraphen,

17) $$m_t = \frac{r}{\int\limits_0^r \frac{dr}{v}}.$$

Das giebt, mit Nr. 6,

18) $$m_t = \frac{2cr}{Vl\,\frac{P}{P-2r}}.$$

D.

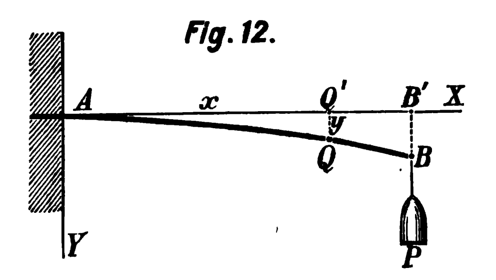
Bezüglich derjenigen Analogien, welche zwischen der Geschwindigkeit einer Bewegung (§ 4, A; § 10) und der Reactionsgeschwindigkeit eines chemischen Vorganges (§ 11; ferner: Th. I, § 12) bestehen, ist immer das Folgende, von W. Ostwald und anderen hervorragenden Chemikern wiederholt Ausgesprochene, zu beachten: Die chemische Geschwindigkeit hat nicht, wie die mechanische, die Eigenschaft, bei aufhörender Ursache unverändert fortzudauern; sie ist stets der Ursache proportional und verschwindet mit ihr. Constant fortbestehende Kräfte erzeugen bei chemischen Vorgängen constante Geschwindigkeiten, was zu den betreffenden in der Mechanik obwaltenden Verhältnissen im Gegensatze steht. Bestimmt durch die wirksamen Mengen der reagirenden Stoffe, lässt sich die Reactionsgeschwindigkeit zwar als Function der Zeit ausdrücken, indem man jene Mengen als Zeitfunctionen darstellt, hängt aber, ihrem eigentlichen Wesen nach, nicht von der Zeit ab, sondern von den Stoffemengen.

Wenn man also den Begriff „Geschwindigkeit" aus der Mechanik in die Chemie überträgt, so muss dem Vorgenannten

gehörig Beachtung gezollt werden, man muss sich daher fragen, ob die entwickelten Gleichungen nur im mathematischen Sinne Werth haben, oder ob sie auch im chemischen Sinne praktisch anwendbar sind. Von diesem Standpunkte aus das unter A bis C Stehende zu erwägen, möge ausdrücklich empfohlen sein. *)

§ 12. Länge eines belasteten Stabes.

Wird ein gerader prismatischer Körper, z. B. ein Stab oder ein Balken, an dem einen Ende (A; Fig. 12) horizontal festgehalten (eingeklemmt, oder eingemauert), an dem anderen



Ende (B) mit einem Gewichte P belastet, so biegt sich derselbe, unter gewissen Voraussetzungen, nach einer Curve AQB, welche, bezogen auf das in der Figur angegebene Coordinatensystem, die Gleichung

$$1) \qquad y = \frac{P}{6\varepsilon}(3a - x)x^2$$

hat. Dabei bedeutet a die Abmessung AB' und ε das „Elasticitätsmoment"; beide Grössen sind mithin constant. **)

---

*) Es gilt das auch für den im § 12 des ersten Theiles dieses Werkes genannten Begriff der Beschleunigung eines chemischen Vorganges. Er ist im mathematischen Sinne aufzufassen: als „Aenderungsgeschwindigkeit einer Function" (Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, S. 14.) nämlich der Reactionsgeschwindigkeit.

**) Näheres: Navier, Mechanik der Baukunst; 1879; § 86 (S. 42). Oder: Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik; § 235 d. 5. Aufl.

Man soll, durch unbestimmte Integration,

I. die Länge s des zu $AQ' = x$ gehörenden Bogens AQ berechnen (ausgedrückt durch P, ε, a, x) und zwar unter der Voraussetzung, dass, wegen der Kleinheit der Senkung $B'B = c$, diejenigen Potenzen von y' $\left(\text{d. i. } \frac{dy}{dx}\right)$ gleich Null gesetzt werden dürfen, welche höher sind, als die dritte.

Hierauf soll man

II. das Resultat anwenden, um die ganze Länge $AQB = b$ auszudrücken, sowohl durch a, P und ε, als auch durch a und c.

Endlich möge

III. eine der unter II. gewonnenen Gleichungen benutzt werden, um b durch Construction herzuleiten aus a und c.

Lösung. Es ist bekanntlich*)

$$2)\qquad s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Nach dem binomischen Satze aber hat man, wenn die in der Aufgabe bezeichneten Vernachlässigungen gestattet sind (vergl. Thl. I, S. 132, Gl. 6):

$$3)\qquad \sqrt{1 + y'^2} = 1 + \tfrac{1}{2} y'^2.$$

Das giebt, mit Nr. 1,

$$4)\qquad s = \int \left(1 + \frac{P^2}{8\varepsilon^2} [2ax - x^2]^2\right) dx,$$

also

$$5)\qquad s = x + \frac{P^2}{120\,\varepsilon^2} (20a^2 - 15ax + 3x^2)\, x^3,$$

wobei die Constante der Integration abgeleitet ist aus der Bedingung, dass für $x = 0$ auch $s = 0$ sein muss.

Das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung 5 sagt hierbei, um wieviel die Bogenlänge $(AQ = s)$ die Länge ihrer Horizontalprojection $(AQ' = x)$ übertrifft.

Für $x = a$ giebt Nr. 5:

$$6)\qquad b = a + \frac{a^5 P^2}{15\,\varepsilon^2}.$$

---

*) Man sehe etwa: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis; Bd. 1; § 83 der 5. Auflage.

Da, zufolge der Gleichung 1, die Beziehung

7) $$c = \frac{a^3 P}{3\varepsilon}$$

besteht, so lässt sich 5 auch in der Form

8) $$b = a + \frac{3c^2}{5a}$$

geben.

Die zweiten Glieder der rechten Seiten der Gleichungen 6 und 8 drücken wieder aus, um wieviel die ganze Bogenlänge (AQB) grösser ist als ihre auf die X-Achse genommene Projection (AB').

Gemäss Nr. 8 ergiebt sich b durch Construction, wenn man in B auf der Sehne AB eine Senkrechte errichtet. Wird der Punkt, in welchem Letztere die Abscissenachse schneidet, mit R bezeichnet, so ist

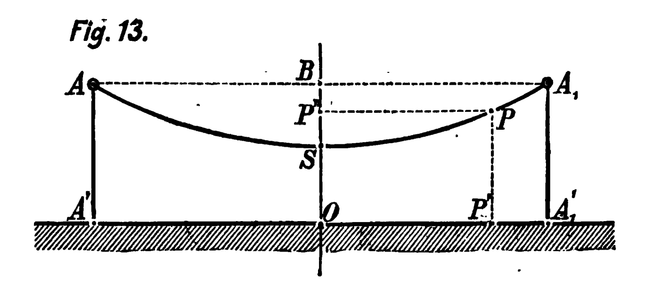
9) $$b = AB' + \tfrac{3}{5} B'R.$$

Anmerkung: In Bezug auf Tangenten, Normalen und Krümmungshalbmesser der Linie AQB (Fig. 12) sehe man: Theil I, § 31.

§ 13. Rectification aufgehangener Fäden und Drähte.

A.

Zwischen zwei festen Punkten A und A_1 (Fig. 13), die gleich hoch über einer wagerechten Geraden $A'A'_1$ liegen und den



(horizontal gemessenen) Abstand

$$AA_1 = 2a$$

haben, ist ein Faden oder Draht mit einer Einsenkungstiefe

$$SB = b$$

aufgehangen, welche, verglichen mit a, sehr wenig beträgt. Der Winkel τ, den die Berührende des Fadens mit dem Horizonte bildet, hat also einen sehr kleinen Werth.

Es soll die Länge

$$ASA_1 = 2s$$

jenes Fadens oder Drahtes berechnet werden und zwar, ausgedrückt durch a und b,

I. unter der Voraussetzung, dass er als gemeine Kettenlinie (Seilcurve) angesehen werden darf,

II. unter der anderen, dass er sich als gemeine Parabel auffassen lässt. In diesem zweiten Falle sollen, weil τ sehr klein ist, alle diejenigen Potenzen von $\tan\tau$ vernachlässigt werden, welche höher sind als die zweite.

Lösung. I. Für den Fall, dass der Faden oder Draht als gemeine Kettenlinie angesehen werden darf, nehmen wir die Richtung von SB als diejenige der positiven Y-Achse eines rechtwinkligen Systems und denken uns die X-Achse derartig unter dem Scheitel S liegend, dass sie von ihm um den Parameter k der Curve absteht.

Dann hat Letztere bekanntlich die Gleichung

$$1)\qquad y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

in welcher e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet*).

Aus ihr folgt (gemäss § 12, Nr. 2) für die halbe Fadenlänge

$$2)\qquad s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right).$$

Da, nach Gleichung 1,

$$3)\qquad b + k = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right)$$

ist, so hat man:

$$(b+k)^2 - s^2 = k^2,$$

*) Bezüglich der Ableitung der Gleichung Nr. 1 sehe man § 49, B.

daher

$$4) \qquad s = \sqrt{b(b+2k)}.$$

Die Gleichung Nr. 2 giebt die gesuchte Fadenlänge als Function von a und k; Nr. 4 hingegen liefert sie als solche von b und k.

Es ist jedoch (laut Aufgabe) jene Länge als Function von a und b verlangt. Man hat also in dem betreffenden besonderen Falle die Zahlenwerthe von a und b in Nr. 3 einzuführen, dann k aus der so erhaltenen transcendenten Gleichung zu berechnen und das Ergebniss in Nr. 2 oder 4 einzusetzen. Kommt Das oft vor, so thut man wohl Tafeln zu berechnen und dann auszunutzen. Ueber die Herstellung derselben sehe man: Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Theil I, S. 100 der 2. Auflage, Punkt ε.

II. Im zweiten Falle, nämlich dann, wenn der Faden oder Draht als gemeine Parabel aufgefasst wird, denken wir uns die unter I. benutzte X-Achse bis in den Scheitel S verschoben, behalten aber die vorige Y-Achse unverändert bei.

Dann hat die Linie die Gleichung

$$5) \qquad x^2 = 2py,$$

wobei $x = P''P$, $y = SP''$ und p der Halbparameter ist.

Für die halbe Fadenlänge s giebt Nr. 5, gemäss Gl. 2 und 3 des § 12:

$$6) \qquad s = \int_0^a \left(1 + \frac{x^2}{2p^2}\right) dx;$$

mithin

$$7) \qquad s = a\left(1 + \frac{a^2}{6p^2}\right).$$

Da nun

$$a^2 = 2pb,$$

also der Halbparameter

$$8) \qquad p = \frac{a^2}{2b},$$

so ist weiter:

$$9) \qquad s = a\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}.$$

Die Fadenlänge ($2s$) übertrifft hiernach die Spannweite ($2a$) um $\frac{4b^2}{3a}$, was sich bekanntlich sehr leicht construiren lässt.

B.

Will man eine Näherungsformel haben, die genauer ist als die Gleichung 9, so hat man bei der Umwandelung von $\sqrt{1+y'^2}$ (§ 12, Nr. 3) in eine Reihe, mehr als zwei Glieder zu nehmen, also höhere Potenzen von $\tan\tau$ zu benutzen. Dann ergiebt sich:

$$10) \qquad s = a\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \cdots\right\}.$$

Näheres: Winkler, Festigkeitslehre; 1867; S. 258 und 259.

C.

Beispielsweise sei erwähnt, dass die Gleichung 9 Benutzung findet bei der Aufstellung oberirdischer Telegraphenleitungen. Dieselbe ist so vorzunehmen, dass der durch Temperaturerniedrigungen eintretenden Verkürzung der Drahtlängen gehörig Rechnung getragen wird. Man sehe hierüber: Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit; 2. Auflage (v. Jahre 1878) S. 47.

§ 14. Bahnlänge eines sich bewegenden Punktes.

Ein auf ein räumliches rechtwinkliges Coordinatensystem bezogener Punkt P bewegt sich derartig, dass sein Abstand von der XZ-Ebene proportional ist dem Quadrate der Entfernung von der YZ-Ebene und für die Einheit dieser Entfernung gleich $\frac{1}{2p}$; ferner die von ihm erstiegene Höhe (das z) proportional der dritten Potenz des Abstandes von der YZ-Ebene und für die Einheit dieses Abstandes gleich $\frac{1}{6p^2}$.

I. Die Gleichungen der drei Bahnprojectionen des Punktes sind anzugeben;

II. die vom Coordinatenanfange ab gemeinte Bahnlänge s soll, ausgedrückt durch x und p, berechnet werden, wobei vorausgesetzt wird, dass p eine bekannte Strecke ist;

endlich soll man

III. sagen, in welcher Weise sich die Länge s aus den Elementen x und p construiren lässt.

Lösung. Dem Wortlaute der Aufgabe entsprechend, ist

1) $$y=\frac{x^2}{2p}$$

die Gleichung der XY-Projection der Bahn des sich bewegenden Punktes; ferner sind

2) $$z=\frac{x^3}{6p^2}$$

und

3) $$z^2=\frac{2y^3}{9p}$$

die Gleichungen der auf die XZ-, bezüglich YZ-Ebene genommenen Bahnprojectionen.

Da nun, nach einem bekannten Satze der Integralrechnung*),

4) $$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

den allgemeinen Ausdruck für die Bahnlänge darstellt, so ergiebt sich aus Nr. 1, 2 und 4:

5) $$s=\int\left(1+\frac{x^2}{2p^2}\right)dx,$$

mithin ist

6) $$s=x+\frac{x^3}{6p^2},$$

wobei die Integrationsconstante aus der Bedingung

$$s=0,\text{ wenn } x=0$$

bestimmt wurde.

Der Werth Nr. 6, oder

7) $$s=x+z,$$

lässt sich auf verschiedene Weisen aus x und p construiren, z. B. so, dass man das zweite Glied in der Form

*) Man sehe, wenn nöthig: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 85 der 5. Auflage.

8)
$$\frac{\frac{x^2}{p}\,x}{6p}$$

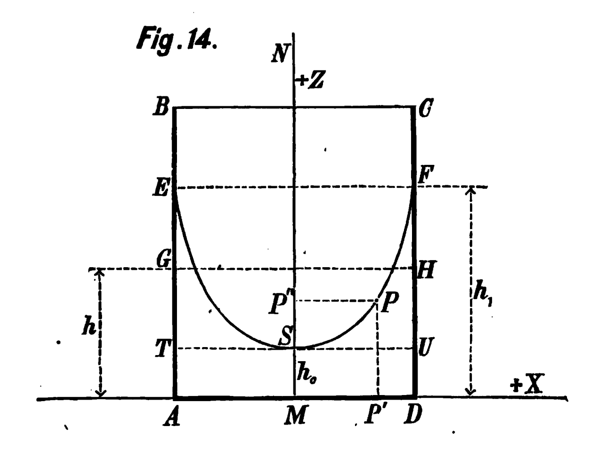
als vierte Proportionale der Strecken $\frac{x^2}{p}$, x und $6p$ ableitet.

Anmerkung. Man unterlasse nicht, diese Construction, oder eine andere, vollständig durchzuführen; auch zeichne man, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem die drei Bahnprojectionen (gemäss Nr. 1—3) und die Bahn.

§ 15. Cubaturen, welche Flüssigkeitsmengen in bewegten und ruhenden Cylindern betreffen.

A.

In einem Cylinder $ABCD$ (Fig. 14), welcher sich um seine senkrechte Achse MN mit unveränderlicher Geschwindigkeit dreht,



befindet sich eine homogene Flüssigkeitsmenge $AESFD$. Der unterste Punkt ihrer Oberfläche (bekanntlich ein Rotationsparaboloid)*) steht vom Cylinderboden um $MS = h_0$ ab; die obersten Punkte haben von jenem Boden die Entfernung $h_1 = AE = DF$.

*) Man vergleiche § 40, A.

Es soll, ausgedrückt durch h_0, h_1 und den Bodenhalbmesser $MA = a$, die Flüssigkeitsmenge V berechnet werden, indem man sie zusammensetzt aus unendlich vielen Hohlcylindern, welche den veränderlichen Grundflächenradius $MP' = x$, die zugehörige Höhe $P'P = MP'' = z$ und die Wandstärke dx haben.

Lösung. Der körperliche Inhalt eines derartigen Hohlcylinders hat den Werth

1) $$dV = 2\pi x z dx.$$

Dabei besteht zwischen x und z die Beziehung

2) $$x^2 = 2p(z - h_0),$$

in welcher p den Halbparameter der auf das Coordinatensystem XMZ bezogenen gemeinen Parabel $ESPF$ bezeichnet. Letzterer ist bestimmt durch die Gleichung

3) $$a^2 = 2p(h_1 - h_0).$$

Aus Nr. 1, 2 und 3 folgt, dass die Flüssigkeitsmenge ausgedrückt ist durch

4) $$V = 2\pi \int_0^a \left(\frac{h_1 - h_0}{a^2} x^2 + h_0\right) x dx,$$

oder durch

5) $$V = \frac{\pi a^2}{h_1 - h_0} \int_{h_0}^{h_1} z dz.$$

Beides giebt:

6) $$V = \pi a^2 \frac{h_0 + h_1}{2},$$

also den Satz: Das Volumen der in dem rotirenden Gefässe befindlichen Flüssigkeitsmenge ist gleich demjenigen eines Kreiscylinders, welcher den Gefässboden als Grundfläche und das arithmetische Mittel der beiden Höhen h_0 und h_1 zur Höhe hat*).

B.

Man löse nun, um sich an die Benutzung verschiedenartiger Volumenelemente zu gewöhnen, die unter A behandelte Aufgabe nochmals und zwar

*) Eine Anwendung dieses Satzes folgt im § 40 unter A, II.

I. dadurch, dass man V als den Unterschied des Cylinders $AEFD$ und des Umdrehungsparaboloids ESF ansieht, letzteres zusammensetzend aus unendlich vielen unendlich dünnen kreisförmigen Scheiben,

II. indem man V auffasst als die Summe zweier Inhalte, von denen der eine dem über die Bodenfläche um h_0 sich erhebenden Cylinder $ATUD$ zukommt, der andere einem über ihm stehenden Körper $TESFU$ mit kreisringförmigen Volumenelementen.

Lösung. In dem Falle I ist

7) $$V = \pi a^2 h_1 - \int_{h_0}^{h_1} \pi x^2 \, dz;$$

im zweiten Falle hingegen hat man:

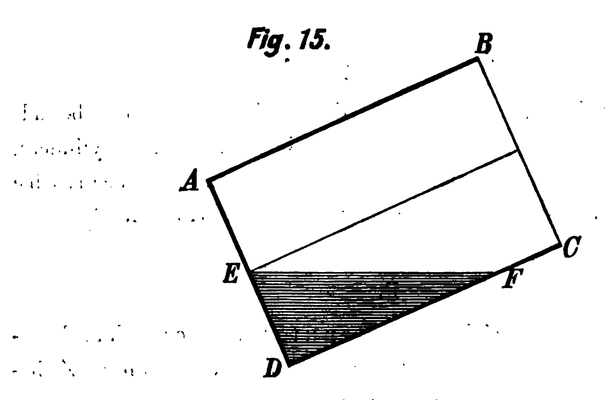
8) $$V = \pi a^2 h_0 + \int_{h_0}^{h_1} \pi (a^2 - x^2) \, dz.$$

Selbstverständlich führt jede dieser beiden Gleichungen wieder auf den Satz Nr. 6.

C.

Der ruhende, schief liegende Kreiscylinder $ABCD$, von welchem die Figur 15 einen die Achse in sich enthaltenden ebenen Schnitt darstellt, enthält die durch DEF angedeutete Flüssigkeitsmenge. Man soll das Volumen V der Letzteren durch die Abmessungen $DE = a$, $DF = b$ ausdrücken und dabei die unendlich dünnen, plattenförmigen Elemente wählen

Fig. 15.



I. in der Form von Dreiecken, welche der Schnittfigur DEF gleichgerichtet sind,

II. als Rechtecke, senkrecht liegend zu der Geraden DE.

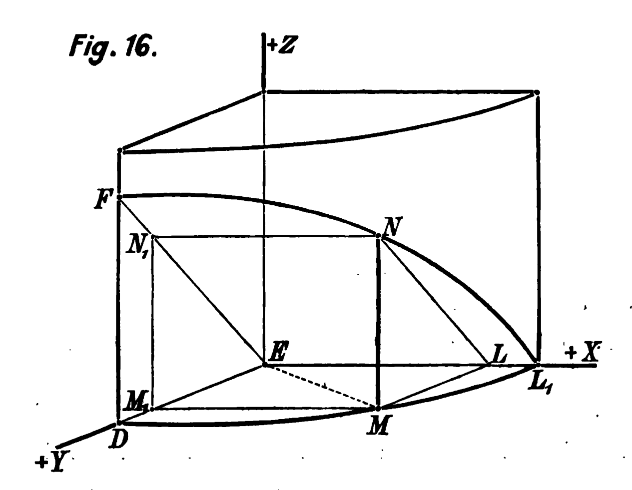
Lösung. Um die betreffenden Volumenelemente leicht zu erkennen, stellen wir die Hälfte der Flüssigkeitsmenge in der durch die Figur 16 angegebenen Weise dar. Dann haben wir für den Inhalt des dreieckförmigen Elementes LMN:

9) $$dV = \tfrac{1}{2} y z dx,$$

wobei $x = EL$, $y = LM$, $z = MN$; ferner für den des rechteckförmigen $MM_1 N_1 N$:

10) $$dV = x z dy.$$

Wegen der Beziehungen, welche zwischen x, y, z, a und b bestehen und der Figur 16 leicht entnehmbar sind, folgt aus Nr. 9:



11) $$V = \frac{b}{a} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx;$$

hingegen aus 10:

12) $$V = 2\frac{b}{a} \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2}\, dy.$$

Beide Gleichungen geben:

13) $$V = \tfrac{2}{3} a^2 b,$$

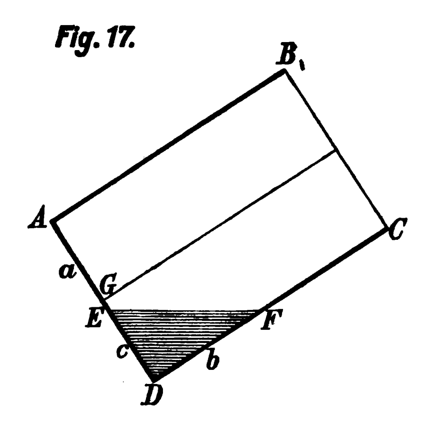
also den Satz: die Hälfte des Volumens V, mithin der Inhalt der

Flüssigkeitsmenge $DEFL_1$ der Figur 16, ist gleich demjenigen einer Pyramide, welche das Quadrat von DE zur Grundfläche und DF als Höhe hat*).

D.

Das unter C Behandelte möge jetzt verallgemeinert werden, indem die Aufgabe gestellt wird, die durch Fig. 17 angedeutete Flüssigkeitsmenge V zu berechnen, ausgedrückt durch die Abmessungen $DG = GA = a$, $DF = b$, $DE = c\ (< a)$.

Fig. 17.



Dabei sollen die unendlich dünnen, plattenförmigen Volumenelemente wie unter C gewählt werden, nämlich

I. in der Form von Dreiecken, gleichgerichtet der Schnittfigur DEF (Fig. 17),

II. rechteckförmig, nämlich senkrecht stehend zu DE.

Das Ergebniss möge auf den besonderen Fall

$$c = a$$

Anwendung finden.

Lösung. Stellt man die Sache in der durch die Figur 18 (Seite 55) angedeuteten Weise dar, so ergiebt sich leicht, dass das dreieckförmige Volumenelement, LMN, den Inhalt

$$14)\qquad dV = \frac{b}{2c}(\sqrt{a^2 - x^2} - a + c)^2\,dx$$

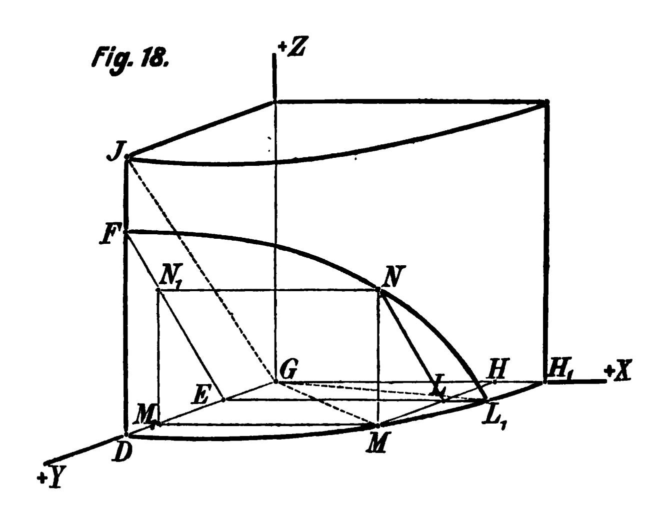
---

*) Anmerkung. Ueber eine aus der Schwerpunktslehre sich ergebende Ableitung der Gleichung Nr. 13 sehe man: Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, Seite 238 und 239 der 5. Auflage.

hat, wobei $x = GH = EL$ ist; das rechteckförmige, MM_1N_1N, hingegen besitzt das Volumen

$$15)\qquad dV = \frac{b}{c}(y - a + c)\sqrt{a^2 - y^2}\,dy,$$

in welchem letzteren Werthe y die Strecke HM bezeichnet.



Aus Nr. 14 folgt:

$$16)\qquad V = \frac{b}{c}\int\limits_0^{\sqrt{c(2a-c)}} (\sqrt{a^2 - x^2} - a + c)^2\,dx;$$

aus 15:

$$17)\qquad V = \frac{2b}{c}\int\limits_{a-c}^{a} (y - a + c)\sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Die Durchführung der Integration, bei welcher von der bekannten (leicht geometrisch ableitbaren) Formel

$$18)\qquad \int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\left\{u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsin\frac{u}{a}\right\}$$

Gebrauch zu machen ist, führt bei Nr. 16 auf:

$$19)\qquad V = \frac{b}{c}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}(3a^2 - 2ac + c^2)\sqrt{c(2a-c)} \\ - a^2(a-c)\arcsin\dfrac{\sqrt{c(2a-c)}}{a}\end{array}\right\};$$

bei Nr. 17 liefert sie:

$$20)\quad V=\frac{b}{c}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}(3a^2-2ac+c^2)\sqrt{c(2a-c)}\\ -a^2(a-c)\arccos\frac{a-c}{a}\end{array}\right\}.$$

Diese Ergebnisse stimmen, was man sofort erkennt, überein und lassen sich, wenn

$$21)\quad \text{arc } EGL_1=\gamma$$

gesetzt wird, in der Form

$$22)\quad V=\frac{b}{c}\left\{\frac{1}{3}(3a^2-2ac+c^2)\sqrt{c(2a-c)}-a^2(a-c)\gamma\right\}$$

darstellen.

Für den besonderen Fall

$$c=a$$

liefern die Gleichungen 19, 20 und 22 wieder Nr. 13.

E.

Benutzt man den Winkel DEM (Fig. 16) als unabhängige Veränderliche und nennt ihn φ, so gehen die Gleichungen 11 und 12 über in

$$23)\quad V=a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi,$$

bezüglich

$$24)\quad V=2a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi.$$

Ferner verwandeln sich, wenn der Winkel DGM der Figur 18 in derselben Weise verwendet und ebenfalls mit φ bezeichnet wird, die Gleichungen 16 und 17 in

$$25)\quad V=\frac{ab}{c}\int_0^{\arccos\frac{a-c}{a}}(a\cos\varphi-a+c)^2\cos\varphi\, d\varphi$$

und

$$26)\quad V=\frac{2a^2b}{c}\int_0^{\arccos\frac{a-c}{a}}(a\cos\varphi-a+c)\sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Man unterlasse nicht, Dies nachzuweisen; zeige auch, dass bei der Durchführung der Integrationen die Gleichungen 23 und 24 wieder auf Nr. 13 führen, die Gleichungen 25 und 26 auf Nr. 22; letztere, wenn von den bekannten Formeln

27) $\int \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{3} \sin \varphi (\cos^2 \varphi + 2) = \sin \varphi (1 - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi)$,

28) $\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi)$,

29) $\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$

Gebrauch gemacht wird.

§ 16. Complanationen.

A.

Zunächst möge der Oberflächeninhalt R der im § 15 unter A behandelten Flüssigkeitsmenge berechnet werden, ausgedrückt durch $MA = a$ (Fig. 14 auf Seite 50) und $h_1 - h_0 = c$.

Lösung. Wird die Länge des Bogens SP mit s bezeichnet, so gilt für den Inhalt desjenigen Oberflächenelementes, welches bei einer vollen Umdrehung des Differentials von s sich erzeugt, die Gleichung

1) $$dR = 2\pi x \, ds = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \, dx,$$

wobei x und z die früher (§ 15, A) genannte Bedeutung haben.

Aus Nr. 1 folgt:

2) $$R = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} \, dx.$$

Mit Berücksichtigung der Beziehung

3) $$a^2 = 2pc$$

giebt das:

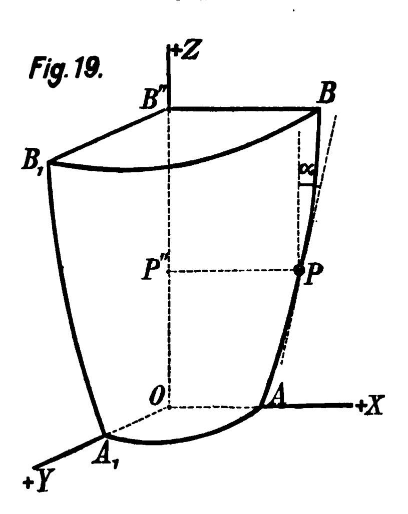
4) $$R = \frac{\pi a}{6c^2} \left(\sqrt{a^2 + 4c^2}^{\,3} - a^3\right).$$

Anmerkung. Es empfiehlt sich, zu zeigen, in welcher Weise dieses Ergebniss als Rechteckfläche construirt werden kann, wenn a und c als Strecken gegeben sind.

B.

Ein Körper, von welchem die Figur 19 (Seite 58) den vierten Theil darstellt, hat die Höhe $OB'' = h$, die wenig verschiedenen

Abmessungen $OA = m$, $B''B = n$ und als Mantel eine **Rotationsfläche**, welche entstand, indem sich die Curve AB ein volles Mal um die senkrechte Achse OB'' drehte.



Da man die Art der, sehr schwach gekrümmten, Linie AB nicht kennt, so hat man (näherungsweise) angenommen, dass sie die Gleichung

1) $$x = a + bz + cz^2$$

habe (wobei $x = P''P$, $z = OP''$ ist) und hat, durch geeignete Messungen, die Coefficienten a, b und c bestimmt. (Vergleiche Theil I, § 21 und 22.)

Es soll nun, ausgedrückt durch a, b, c und h, der Inhalt

$$S = 4 \,.\, AA_1 B_1 B$$

der **Mantelfläche** berechnet werden, indem man die Gleichung Nr. 1 zu Grunde legt und ferner voraussetzt, dass alle diejenigen Potenzen von $\tan\alpha$ vernachlässigt werden dürfen, welche höher sind, als die zweite.

Das Ergebniss soll man auf denjenigen **besonderen Fall** anwenden, in welchem die Linie AB in eine **Gerade** übergeht; für denselben möge S durch m, n und h ausgedrückt werden.

Lösung. Streng genommen ist

2) $$S = 2\pi \int_0^h x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz.$$

Durch Einführung von Nr. 1 und mit Benutzung der im Vorhergehenden genannten Näherung (man vergleiche Th. I, S. 132, Gl. 6) geht Das über in:

3) $$S = 2\pi \int_0^h (a + bz + cz^2)(1 + \tfrac{1}{2}[b + 2cz]^2)\,dz.$$

Es ergiebt sich mithin:

4) $$S = \pi(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta h + \tfrac{1}{3}\gamma h^2 + \tfrac{1}{4}\delta h^3 + \tfrac{1}{5}\varepsilon h^4)\,h,$$

wobei

$$\alpha = a(2 + b^2),\ \beta = b(2 + 4ac + b^2),\ \gamma = c(2 + 4ac + 5b^2),$$
$$\delta = 8bc^2,\ \varepsilon = 4c^3.$$

Wird die Curve AB zu einer Geraden, so ist

$$c = 0$$

und

5) $$S = \tfrac{1}{2}\pi(2 + b^2)(2a + bh)\,h.$$

Oder, wenn man die Coefficienten a und b durch die Abmessungen m, n und h ausdrückt,

6) $$S = \pi(m + n)\frac{2h^2 + (m - n)^2}{2h}.$$

Wie sich sofort erkennen lässt, stimmt Das mit der aus der elementaren Stereometrie für die Mantelfläche des abgestumpften Kegels bekannten Formel überein, wenn für die letztere von der vorher genannten Näherung (Th. I, S. 132, Gl. 6) Gebrauch gemacht, nämlich der die Länge der Mantelseite darstellende Werth

7) $$\sqrt{h^2 + (n - m)^2} = h\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{(n - m)^2}{h^2}\right)$$

gesetzt wird.

C.

Nachdem im Vorhergehenden, unter A und B, die Complanation von Umdrehungsflächen behandelt worden ist, möge nun die einer Cylinderfläche folgen; es soll nämlich mit Benutzung der Figuren 15 und 16 (auf Seite 52 und 53) berechnet werden, welchen Inhalt

$$S = 2\,.\,DFNL_1M,$$

ausgedrückt durch $DE = a$ und $DF = b$, derjenige Cylindermanteltheil hat, den die dort (§ 15, C) untersuchte Flüssigkeitsmenge bedeckt. Auch möge man angeben, wie sich jener Flächeninhalt S zu dem des Dreiecks DEF (Fig. 15 und 16) verhält.

Lösung. Das längs MN sich erstreckende Element hat den Inhalt

8) $$dS = z\,ds,$$

wobei z, wie früher, die Strecke MN, s aber die Länge des Bogens $L_1 M$ bedeutet.

Aus nahe liegenden Gründen ist es vortheilhaft, den Winkel φ, nämlich DEM (vergl. § 15, E), als unabhängige Veränderliche zu benutzen. Man hat dann, statt Nr. 8,

9) $$dS = ab \cos\varphi\, d\varphi.$$

Hieraus folgt:

10) $$S = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi.$$

Es ist also

11) $$S = 2ab,$$

mithin die von der Flüssigkeitsmenge bedeckte Mantelfläche das Vierfache des Inhaltes des Dreiecks DEF.

D.

Zur Verallgemeinerung des unter C Vorausgegangenen soll jetzt die Aufgabe gestellt werden, den Flächeninhalt S desjenigen Cylindermanteltheiles zu berechnen, den die im § 15 unter D (statt unter C) behandelte Flüssigkeitsmenge benetzt. Man verlangt also, bezogen auf die Fig. 18, den Inhalt

$$S = 2\,.\,DFNL_1M$$

ausgedrückt durch $DG = a$, $DF = b$ und $DE = c$.

Lösung. Sehr leicht ergiebt sich aus der Fig. 18:

12) $$S = \frac{2ab}{c}\int_0^{\arccos\frac{a-c}{a}} (a\cos\varphi - a + c)\, d\varphi,$$

wobei φ den Winkel DGM bezeichnet. (Man vergleiche § 15, Nr. 25 und 26.)

Die Ausführung der Integration liefert:

13) $$S = \frac{2ab}{c}\left\{\sqrt{c(2a-c)} - (a-c)\arccos\frac{a-c}{a}\right\}$$

für den Inhalt der bedeckten Mantelfläche.

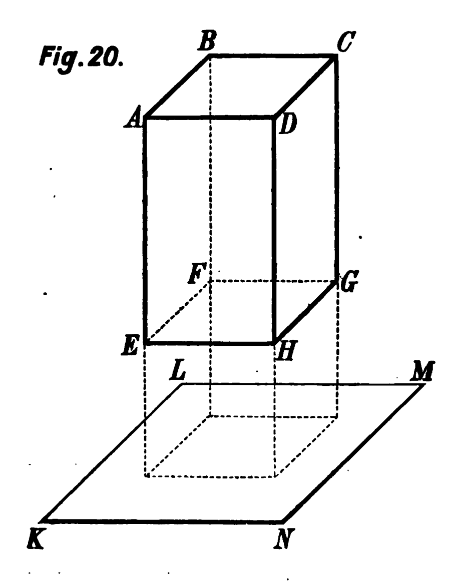
Construction dieses Werthes kann erfolgen, indem man beachtet, dass $\frac{ab}{c}$ die Strecke DJ der Figur 18 darstellt (in welcher $GJ \parallel EF$ liegt), dass ferner $\sqrt{c(2a-c)}$ die Länge von EL_1 bedeutet, endlich $(a-c)\arccos\frac{a-c}{a}$ als ein Kreisbogen erhalten werden kann, beschrieben aus dem Mittelpunkte G mit dem Halbmesser GE innerhalb des Winkels DGL_1.

Wird $c=a$, so geht Nr. 13 wieder über in 11.

§ 17. Massen und Gewichte ungleichförmig dichter Körper.*)

A.

Die Dichtigkeit eines geraden rechtwinkligen Parallelepipeds $ABCDEFGH$ (Fig. 20), welches die Höhe h und



die Basiskantenlängen a und b hat, ist umgekehrt proportional dem senkrechten Abstande z von einer Ebene $KLMN$, die um h_1 unter der Grundfläche $EFGH$, der letzteren parallel, liegt. Für

*) Man vergleiche § 30.

$z = 1$ wiegt die Volumeneinheit k Kilogramm. Man soll für jenes Parallelepiped das Gewicht P berechnen, indem man es aus den Gewichten von unendlich dünnen, der Grundfläche $EFGH$ parallel liegenden Platten zusammensetzt. Hierauf soll das Ergebniss auf denjenigen besonderen Fall Anwendung finden, in welchem $a = 80$ und $b = 70$ Centimeter, $h = 30$ und $h_1 = 15$ Meter ist, dabei k für das Cubikmeter 31 Kilogramm beträgt und P auf eine Decimalstelle der letztgenannten Gewichtseinheit abgerundet verlangt wird.

Lösung. Das plattenförmige Element, welches in der Höhe z über der Ebene $KLMN$ liegt, hat das Gewicht

1) $$dP = (ab \,.\, dz)\frac{k}{z}.$$

Demnach ist

2) $$P = abk\int_{h_1}^{h_1+h}\frac{dz}{z},$$

also

3) $$P = abk\; l\frac{h+h_1}{h_1}$$

und zwar ausgedrückt in Kilogrammen, wenn a, b, h und h_1 in derjenigen Längeneinheit gemeint sind, auf deren Würfel sich die Angabe von k bezieht.

Für den in der Aufgabe genannten besonderen Fall giebt das, gemäss § 75 (Abschnitt B) des ersten Theiles dieses Werkes,

4) $$P = 19{,}1 \text{ Kilogramm.}$$

B.

Ein gerader Kreiscylinder möge die Höhe h und den Grundflächenhalbmesser a haben. Das Gewicht P des Körpers soll berechnet werden

I. unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit dem Abstande r von der Cylinderachse umgekehrt proportional sei und dem Gewichte p der Volumeneinheit für $r = 1$ der Werth k zukomme;

II. unter der Annahme, dass die Dichtigkeitsveränderung durch die Gleichung

5) $$p = \frac{k}{r + c},$$

in welcher c eine constante, positive Strecke bedeutet, gekennzeichnet werde.

Das unter I Gefundene soll zur Bestimmung des mittleren Gewichtes $\left(p_m = \frac{P}{V}\right)$ der Volumeneinheit des Körpers benutzt werden. Das bei II Erhaltene möge man auf denjenigen besonderen Fall anwenden, in welchem $a = 0{,}5$, $c = 0{,}01$, $h = 0{,}02$ Meter ist und das Cubikcentimeter 3 Gramm wiegen würde, wenn der Abstand desselben von der Cylinderachse durchweg 5 Centimeter betrüge.

Lösung. Die Benutzung unendlich dünner Hohlcylinder führt im ersten Falle auf die Gleichung

6) $$P = 2\pi h k \int_0^a dr = 2\pi a h k;$$

hingegen unter der zweiten Annahme zu:

7) $$P = 2\pi h k \int_0^a \frac{r\,dr}{r + c},$$

mithin auf

8) $$P = 2\pi h k \left(a - c\, l\, \frac{a + c}{c}\right).$$

Für $c = o$ giebt Nr. 8 zunächst einen unbestimmten Werth, kommt aber bei näherer Untersuchung des betreffenden vieldeutigen Symbols $(0 \,.\, \infty)$ auf die Gleichung 6 zurück. Letztere ergiebt sich auch (und zwar schneller), wenn man in Nr. 7 (statt in 8) den Abstand c verschwinden lässt.

Das mittlere Gewicht der Volumeneinheit hat in dem Falle I den Werth

9) $$p_m = 2\,\frac{k}{a}$$

ist also das Doppelte von demjenigen, welches in der Mantelfläche des Cylinders herrscht.

Für den am Schlusse der Aufgabe genannten besonderen Fall ergiebt sich

10) $$k = 18 \text{ Gramm}$$

und demgemäss, auf zwei Decimalstellen abgerundet,

11) $$P = 10{,}42 \text{ Kilogramm.}$$

C.

Das Gewicht P des im Vorhergehenden behandelten geraden Kreiscylinders (Höhe h, Grundflächenhalbmesser a) möge nun berechnet werden unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit des Körpers umgekehrt proportional sei dem Quadrate des senkrechten Abstandes z von der Basis, ferner unter der Annahme, dass für $z = 1$ die Volumeneinheit das Gewicht k habe.

Dabei soll P Herleitung finden

I. durch bestimmte Integration,

II. indem man den Cylinder in eine endliche Anzahl, m, gleich hoher Schichten zerlegt, die Gewichte derselben näherungsweise aus den in den betreffenden Deckflächen herrschenden berechnet und schliesslich m ins Unendliche wachsen lässt.

Lösung. Es ist

12) $$P = \pi a^2 k \int_0^h \frac{dz}{z^2},$$

also

13) $$P = \infty.$$

Zu demselben Ergebniss kommt man auch auf dem unter II genannten Wege. Wird nämlich näherungsweise angenommen, dass innerhalb einer jeden der m Schichten die Dichtigkeit unveränderlich sei und die Volumeneinheit so viel wiege, als sie thatsächlich in der Deckfläche der betreffenden Schicht wiegt, so ergiebt sich

14) $$P = \frac{\pi a^2 k m}{h}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right),$$

also für $m = \infty$ wieder Nr. 13. Bei dieser Art der Behandlung genügt es übrigens, nur die unterste der m Schichten in Betracht zu ziehen. Sie hat, nach der festgesetzten Annahme, das Gewicht

15) $$\Delta_1 P = \frac{\pi a^2 k m}{h},$$

was, für $m = \infty$, bereits auf Nr. 13 führt, ohne dass die anderen Schichten beachtet werden.

D.

Zur Verallgemeinerung des unter C Vorausgegangenen soll jetzt angenommen werden, dass die Gleichung

16) $$p = k z^n$$

für das Gewicht der Volumeneinheit des Cylinders gelte und n dabei irgend eine constante, positive oder negative, endliche Zahl sei. Bei der Berechnung von P sollen die Fälle

$$n \gtrless -1 \text{ und } n = -1$$

sachgemässe Unterscheidung finden.

Das Ergebniss möge auf

$$n = 2,\ 1,\ \tfrac{2}{3},\ 0,\ -\tfrac{2}{3},\ -1,\ -2$$

angewendet werden.

Lösung. Man hat

17) $$P = \pi k a^2 \int_0^h z^n \, dz.$$

In dem Falle

$$n \gtrless -1$$

giebt das:

18) $$P = \frac{\pi k a^2 (h^{n+1} - 0^{n+1})}{n+1};$$

mithin für $n > -1$:

19) $$P = \frac{\pi k a^2 h^{n+1}}{n+1};$$

hingegen, wenn $n < -1$ ist:

20) $$P = \infty.$$

Zu Nr. 20 führt die Gleichung 17 auch in dem Falle $n = -1$, für welchen man bekanntlich auf den natürlichen Logarithmus kommt.

Ferner ergeben sich aus dem Vorhergehenden die Werthe

21) $$\begin{cases} P_{n=2} = \frac{1}{3} \pi k a^2 h^3, \quad P_{n=1} = \frac{1}{2} \pi k a^2 h^2, \\ P_{n=2/3} = \frac{3}{5} \pi k a^2 h \sqrt[3]{h^2}, \quad P_{n=0} = \pi k a^2 h, \\ P_{n=-2/3} = 3 \pi k a^2 \sqrt[3]{h} \\ P_{n=-1} = \infty, \quad P_{n=-2} = \infty, \end{cases}$$

deren letztgenannter bereits unter C abgeleitet wurde.

E.

Eine Pyramide hat die Höhe h, den Grundflächeninhalt g. Die Dichtigkeit ist proportional der n^{ten} Potenz des senkrechten Abstandes von der Basis und für die Einheit desselben gleich k. Man soll die Masse M des Körpers für die Fälle $n = +3$ und $n = -3$ berechnen.

Lösung. In dem ersten Falle ist

$$22)\qquad M = \frac{gk}{h^2}\int_0^h (h-z)^2 z^3\, dz,$$

wobei z den senkrechten Abstand des allgemeinen Punktes von der Grundfläche bezeichnet.

Aus Nr. 22 folgt:

$$23)\qquad M = \tfrac{1}{6}\, kgh^4.$$

Die Masse beträgt also $\frac{1}{20}$ derjenigen, welche vorhanden sein würde, wenn die Pyramide überall die in ihrer Spitze herrschende Dichtigkeit hätte.

Im zweiten Falle ergiebt sich

$$24)\qquad M = \infty.$$

F.

Für einen geraden elliptischen Kegel von der Höhe h sind a und b die Halbachsenlängen der Grundfläche. Die Dichtigkeit ist proportional dem Quadrate des Abstandes von der Basis und hat für die Einheit desselben den Werth k. Die Masse M und die mittlere Dichtigkeit θ_m sollen berechnet werden.

Lösung. Man findet leicht:

$$25)\qquad M = \tfrac{1}{30}\, \pi abkh^3$$

und

$$26)\qquad \theta_m = \tfrac{1}{10}\, kh^2,$$

also für die mittlere Dichtigkeit 10 Procent derjenigen, welche der Spitze des Kegels zukommt.

G.

Endlich möge es sich um die Herleitung der Masse M und der mittleren Dichtigkeit θ_m einer Kugel handeln

I. unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit dem Abstande vom Mittelpunkte,

II. unter der Annahme, dass sie dem von der Aequatorebene proportional sei und dabei für die Einheit eines jeden dieser beiden Abstände den Werth k habe.

Lösung. Unendlich dünne Hohlkugeln als Elemente benutzend, findet man im ersten der beiden Fälle

27) $$M = \pi k a^4,$$

also den Satz, dass die mittlere Dichtigkeit $\frac{3}{4}$ von derjenigen ist, welche an der Kugeloberfläche herrscht.

Ferner ergiebt sich, unter Verwendung kreisscheibenförmiger Elemente, für den zweiten Fall:

28) $$M = \tfrac{1}{2} \pi k a^4,$$

mithin

29) $$\theta_m = \tfrac{3}{8} k a,$$

d. i. $\frac{3}{8}$ der den Kugelpolen zukommenden Dichtigkeit.

§ 18. Schwerpunkte *).

A.

Wenn die Lage des Schwerpunktes einer Linie, einer Fläche, oder eines Körpers berechnet werden soll, so ist durch Gleichungen auszudrücken, dass die Summe der statischen Momente aller Gewichtselemente gleich sein muss dem statischen Momente des Gesammtgewichtes **).

Je nach der Art der hierbei zur Benutzung kommenden Elemente sind die auftretenden Integrale einfache oder mehrfache. Beispiele, welche dem Gebiete der einfachen Integration angehören, folgen hier unter B bis G, während solche, die sich auf mehrfache Integrale beziehen, im § 32 zur Behandlung gelangen.

B.

Die Gleichung der auf ein rechtwinkliges System bezogenen einfach gekrümmten Linie APB (Fig. 21) sei

1) $$y = f(x),$$

wobei $OP' = x$, $P'P = y$; die Einheit der Bogenlänge s möge

*) Man vergleiche § 32.

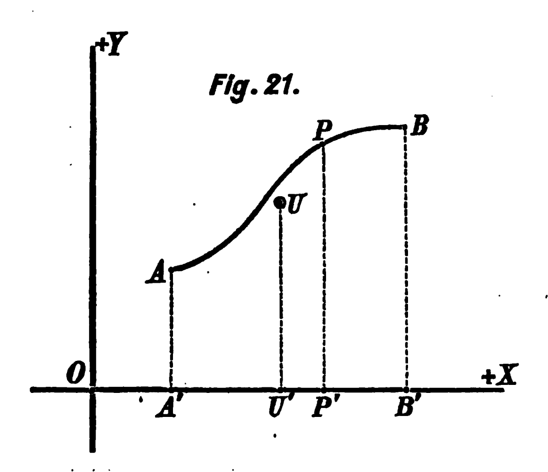
**) Näheres: Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Th. I, S. 36 der 2. Auflage.

das, im Allgemeinen veränderliche, nämlich nach irgend einem Gesetze von x abhängende, Gewicht γ haben.

Man soll die Coordinaten

$$O U' = \xi, \quad U' U = \eta$$

des Schwerpunktes U berechnen (durch Integrale ausdrücken), auch



das Ergebniss auf einen besonderen Fall anwenden, nämlich auf den, in welchem die Curvengleichung lautet:

2) $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

und γ constant ist.

Lösung. Wird das Gewicht der Linie mit p bezeichnet, die Länge der Anfangsabscisse $O A'$ mit x_0, die Endabscisse $O B'$ mit x_1, so drückt die Gleichung

3) $$p \xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} x \gamma \, ds$$

aus, dass, bezogen auf die Y-Achse, das statische Moment des Bogengewichtes gleich ist der Summe der statischen Momente aller Gewichtselemente. (Man vergleiche A.)

Dasselbe sagt die Gleichung

4) $$p \eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} y \gamma \, ds$$

bezüglich der X-Achse.

Aus Nr. 3 und 4 folgt:

5) $$\xi = \frac{1}{p}\int_{x=x_0}^{x=x_1} \gamma\, x\, ds\,,$$ 6) $$\eta = \frac{1}{p}\int_{x=x_0}^{x=x_1} \gamma\, y\, ds\,,$$

wobei

7) $$p = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \gamma\, ds$$

ist und für das Bogendifferential bekanntlich die Gleichung

8) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Giltigkeit hat.

Bei unveränderlichem Gewichte der Längeneinheit des Curvenbogens gehen die Gleichungen Nr. 5 und 6 in die einfacheren

9) $$\xi = \tfrac{1}{s}\int_{x=x_0}^{x=x_1} x\, ds\,,$$ 10) $$\eta = \tfrac{1}{s}\int_{x=x_0}^{x=x_1} y\, ds.$$

über, für welche die Bogenlänge s bestimmt ist durch

11) $$s = \int_{x=x_0}^{x=x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

Liegt der durch die Gleichung 2 angegebene besondere Fall vor, so ist die Linie symmetrisch zu beiden Coordinatenachsen und es hat ein Quadrant derselben die in Fig. 22 mit $A\,P\,B\,C$ bezeichnete Form (welche bekanntlich leicht aus der des umgeschriebenen Kreises abgeleitet werden kann).

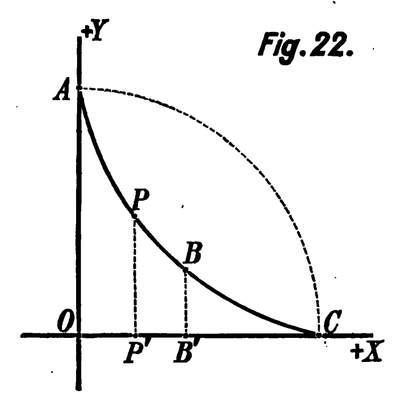


Fig. 22.

Setzt man den aus Nr. 2 folgenden Betrag von $\sqrt{1 + y'^2}$, nämlich $a^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}$, in die Gleichungen 9 bis 11 ein, so ergeben sich für die Coordinaten des Schwerpunktes des Bogens $A\,B$ die Werthe

12) $$\xi = \tfrac{2}{5}\, x_1$$

und

13) $$\eta = \tfrac{2}{5}\,\frac{a^{\frac{5}{3}} - \left(a^{\frac{2}{3}} - x_1^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}}{x_1^{\frac{2}{3}}},$$

oder

14) $$\eta = \tfrac{2}{5}\,\frac{a^{\frac{5}{3}} - y_1^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}}},$$

wobei $x_1 = OB'$ ist und $y_1 = B'B$.

Für den ganzen Quadranten $APBC$ folgt hieraus:

15) $$\xi = \eta = \tfrac{2}{5}\,a.$$

C.

Zur Ergänzung und Erweiterung des Vorhergehenden soll nun die Aufgabe gestellt werden: Die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes einer doppelt gekrümmten Linie zu berechnen. Letztere möge, bezogen auf ein rechtwinkliges System, durch die Gleichungen

16) $$y = f(x)$$

ihres Grundrisses und

17) $$z = \varphi(x)$$

ihres Aufrisses gegeben sein; ferner soll die Bogenlänge von $x = x_0$ bis $x = x_1$ in Betracht kommen und die Längeneinheit das, im Allgemeinen veränderliche, Gewicht γ haben.

Lösung. Wir bezeichnen die Bogenlänge wieder mit s, das Bogengewicht mit p. Dann ist analytisch auszudrücken, dass das statische Moment von p, bezogen auf jede der drei Coordinatenebenen, gleich ist der Summe der statischen Momente aller Gewichtselemente. Dies führt zu den Gleichungen

18) $$\xi = \frac{1}{p}\int_{x=x_0}^{x=x_1} x\,\gamma\,ds,$$

19) $$\eta = \frac{1}{p}\int_{x=x_0}^{x=x_1} y\,\gamma\,ds,$$

20) $$\zeta = \frac{1}{p}\int_{x=x_0}^{x=x_1} z\,\gamma\,ds,$$

in denen das Bogendifferential

$$21)\qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

ist und das Bogengewicht

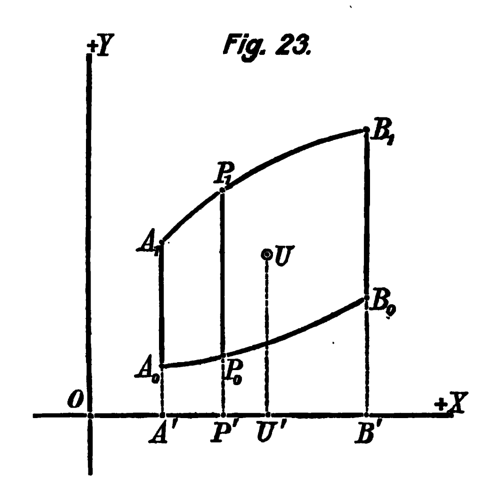
$$22)\qquad p = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \gamma\, ds = \int_{x_0}^{x_1} \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

In welcher Weise sich diese Gleichungen vereinfachen, wenn ein constantes γ vorliegt, darf wohl für selbstverständlich gelten.

Anmerkung. Man führe dies näher durch und wende das Ergebniss auf einen besonderen Fall an, etwa auf die Herleitung der Schwerpunktscoordinaten der im § 14 untersuchten Bahn, deren Länge s dort schon berechnet wurde.

D.

Nachdem unter B und C Curvenschwerpunkte behandelt worden sind, möge nun für ebene Flächen die Berechnung der Lage des Schwerpunktes folgen und zwar unter der Voraussetzung, dass dieselben homogen seien, was hier und im Folgenden bedeuten soll, dass das Gewicht der quadratischen Einheit einen constanten Werth habe.



Die die Fläche begrenzenden Curven $A_0\, B_0$ und $A_1\, B_1$ (Fig. 23) sollen die Gleichungen

23) $$y_0 = f_0(x)$$
und
24) $$y_1 = f_1(x)$$
haben, in denen $x = OP'$, $y_0 = P'P_0$, $y_1 = P'P_1$ ist. Die Anfangsabscisse OA' möge (wie im Vorhergehenden) mit x_0, die Endabscisse OB' mit x_1 bezeichnet werden; ferner sei S der Inhalt der Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$, deren auf das System XOY bezogene Schwerpunktscoordinaten $OU' = \xi$, $U'U = \eta$ man berechnen soll.

Lösung. Zerlegung der Fläche in unendlich schmale, der Y-Achse gleichgerichtete, Streifen giebt, bei Anwendung des unter A genannten Satzes (von den statischen Momenten):

25) $$\xi = \frac{1}{S}\int_{x_0}^{x_1} x(y_1 - y_0)\,dx,$$

26) $$\eta = \frac{1}{2S}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,dx,$$

wobei

27) $$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,dx$$

ist.

Wie diese Gleichungen in jedem besonderen Falle anzuwenden sind, bedarf keiner Erklärung. (Man beachte aber die am Schlusse von F stehende „Anmerkung zu D, E und F"; ferner § 32, A.)

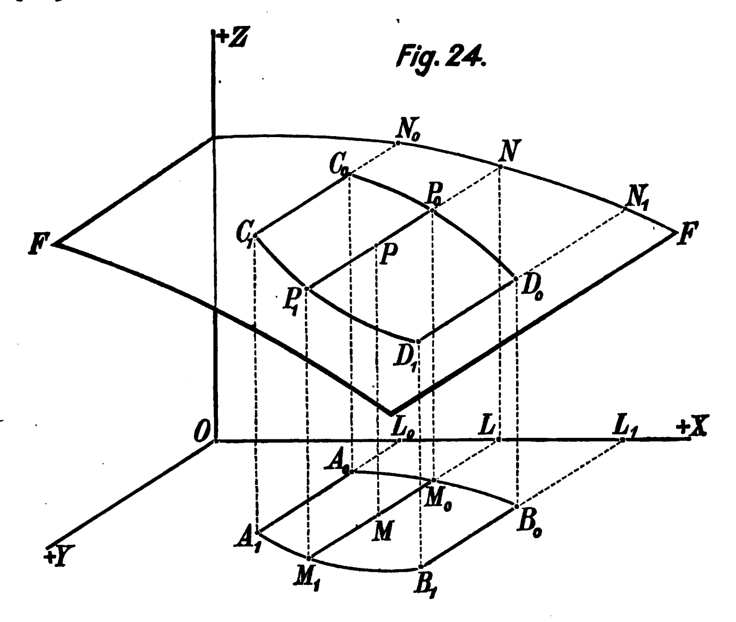
E.

Der durch das Vorausgehende erledigten Herleitung der Schwerpunktscoordinaten homogener ebener Flächen möge jetzt die der Cylinderflächen folgen:

In der XY-Ebene eines rechtwinkligen Systems (Fig. 24 auf Seite 73) sei ein Grundriss $A_0 B_0 B_1 A_1$ gegeben durch die Gleichungen

28) $$y_0 = f_0(x)$$
und
29) $$y_1 = f_1(x)$$
der Curven $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ (wobei $OL = x$, $LM_0 = y_0$, $LM_1 = y_1$); ferner durch die der Y-Achse parallel liegenden, zu

$O L_0 = x_0$ und $O L_1 = x_1$ gehörenden, Geraden $A_0 A_1$, bezüglich $B_0 B_1$.



Weiter soll in der XZ-Ebene eine Curve $N_0 N N_1$ vorgeschrieben sein als Leitlinie für eine der Y-Achse gleichgerichtete Cylinderfläche FF. Die Gleichung jener Curve laute:

30) $$z = \varphi(x),$$

wobei $z = LN$ ist; die Bogenlänge möge s heissen.

Verlangt werden die analytischen Ausdrücke für die Schwerpunktscoordinaten ξ, η und ζ des homogenen Cylinderflächentheils $C_0 D_0 D_1 C_1$, welcher senkrecht über dem vorgeschriebenen Grundrisse $A_0 B_0 B_1 A_1$ liegt und dessen Inhalt mit S bezeichnet werden soll.

Lösung. Auf dem für die Ableitung von Nr. 25 und 26 genannten Wege gelangt man leicht zu den Werthen:

31) $$\xi = \frac{1}{S} \int_{x=x_0}^{x=x_1} x\,(y_1 - y_0)\,ds,$$

32) $$\eta = \frac{1}{2S} \int_{x=x_0}^{x=x_1} (y_1^2 - y_0^2)\,ds,$$

33) $$\zeta = \frac{1}{S}\int_{x=x_0}^{x=x_1} z\,(y_1 - y_0)\,ds,$$

in welchen

34) $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

ist und

35) $$S = \int_{x=x_0}^{x=x_1} (y_1 - y_0)\,ds = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Bezüglich der Anwendung dieser Gleichungen sehe man die nachfolgende „Anmerkung zu D, E und F".

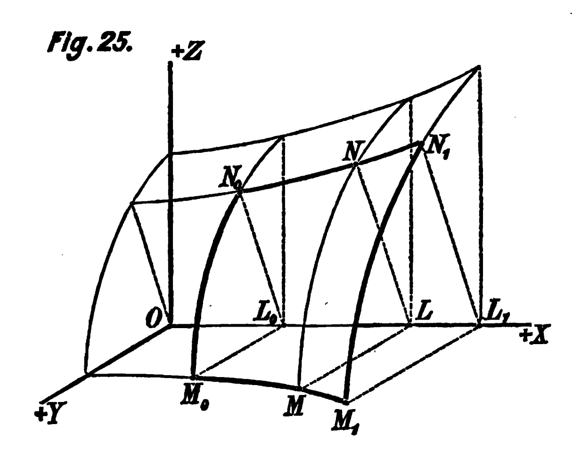
F.

Ferner soll die Berechnung der Lage des Schwerpunktes homogener Umdrehungsflächen zur Behandelung gelangen. Dabei möge die Aufgabe folgendermassen lauten:

Durch die Gleichung

36) $$y = f(x),$$

in welcher x die Strecke OL, y die Strecke LM der Figur 25 bedeutet, ist eine in der XY-Ebene liegende Curve $M_0 M_1$ gegeben, deren Bogenlänge s von $OL_0 = x_0$ bis $OL_1 = x_1$ ge-



meint wird. Jene Curve dreht sich um die X-Achse des rechtwinkligen Systems und erzeugt dadurch die Rotationsfläche $M_0 N_0 N_1 M_1$, deren Inhalt S heissen möge. Der Drehwinkel MLN

ist gleich α; das Gewicht der Flächeneinheit constant. Man soll die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes der Fläche $M_0 N_0 N_1 M_1$ berechnen, auch das Ergebniss auf denjenigen besonderen Fall anwenden, in welchem ein ganzer Quadrant der Umdrehungsfläche vorliegt.

Lösung. Das längs MN liegende gürtelförmige Flächenelement, dessen Schwerpunkt Q heissen möge, hat den Inhalt

$$37)\qquad dS = \alpha y\, ds = \alpha y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Bezeichnet man mit u, v, w die Coordinaten von Q in Bezug auf die YZ-, XZ- und XY-Ebene, so gelten (zufolge des unter A genannten Satzes) die Gleichungen

$$38)\qquad S\xi = \int_{x=x_0}^{x=x_1} u \,.\, dS,$$

$$39)\qquad S\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} v \,.\, dS,$$

$$40)\qquad S\zeta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} w \,.\, dS.$$

Dabei ist $u = x$. Die Werthe von v und w ergeben sich, wenn man den für die Schwerpunktslage des Kreisbogens geltenden Satz (welcher als bekannt vorausgesetzt werden darf, oder aus den unter B entwickelten Formeln folgt) zur Anwendung bringt.

Es liefert das die Gleichungen

$$41)\qquad \xi = \frac{\alpha}{S} \int_{x_0}^{x_1} x y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$42)\qquad \eta = \frac{\sin\alpha}{S} \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$43)\qquad \zeta = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{S} \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

also

$$44)\qquad \zeta = \left(\tan \frac{\alpha}{2}\right) \eta,$$

für welche

45) $$S = a\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ist.

Liegt ein ganzer Quadrant der Umdrehungsfläche vor, so hat man die Werthe:

46) $$\xi = \frac{\pi}{2S}\int_{x_0}^{x_1} xy\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

47) $$\eta = \zeta = \frac{1}{S}\int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

48) $$S = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Anmerkung zu D, E und F. Sehr einfache Beispiele für die Anwendung der Gleichungen Nr. 25—27, 31—35 und 41—48 ergeben sich, wenn für die in den Figuren 23, 24 und 25 vorkommenden Curven A_0B_0, A_1B_1, N_0N_1, M_0M_1 gerade Linien, Parabelbögen oder Kreisbögen genommen werden, was hiermit zur näheren Durchführung empfohlen sein möge.

Wer minder einfache Fälle zu behandeln wünscht, der benutze: Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Theil I, Seite 48—64 der zweiten Auflage (wo bezüglich des Schwerpunktes ebener Flächen auch auf die Verwendung von Polarcoordinaten Rücksicht genommen ist.)

G.

Das unter A bis F Vorausgegangene möge zum Abschlusse kommen, indem die Aufgabe gestellt wird, für zwei ungleichförmig dichte Körper die Schwerpunktslage zu berechnen.

Der erste dieser Körper sei ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. Die Kathetenlängen sollen a und c heissen; die Höhe des Körpers sei b. Von der Dichtigkeit möge vorausgesetzt werden, dass sie proportional dem Abstande von derjenigen Seitenfläche wachse,

welche durch die Kanten b und c gebildet wird; ferner, dass für die Einheit dieses Abstandes der Dichtigkeitswerth gleich k sei.

Der zweite jener Körper soll ein gerader Kreiscylinder von der Achsenlänge a und dem Grundflächenhalbmesser b sein. Die Dichtigkeit möge sich derartig ändern, dass das Gewicht der Volumeneinheit immer aus einem constanten (positiven) Theile k und aus einem veränderlichen besteht, welcher dem (senkrechten) Abstande von der Deckfläche des Cylinders proportional ist und für die Einheit dieses Abstandes den (positiven) Werth n hat.

Lösung. Unter Benutzung von Schichten, deren Art wohl für beide Körper selbstverständlich ist, gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

Der Schwerpunkt des Prismas liegt in der Hälfte der Höhe, dabei von der bc-Seitenfläche um $\frac{1}{2}a$, von der ab-Seitenfläche um $\frac{1}{4}c$ abstehend.

Der Cylinderschwerpunkt, auf der Achse befindlich, hat von der Deckfläche die Entfernung

49) $$\zeta = \frac{2na + 3k}{3(na + 2k)}a.$$

Ist n, verglichen mit k, so klein, dass die den Faktor n führenden Glieder vernachlässigt werden dürfen, so hat ζ den Näherungswerth $\frac{1}{2}a$; wenn hingegen n, verglichen mit k, so gross ist, dass man die k-Glieder unterdrücken darf, so gilt näherungsweise: $\zeta = \frac{2}{3}a$.

§ 19. Die Guldin'sche Regel.

Der nach Guldin benannte Doppelsatz*) lautet bekanntlich:

I. Falls die einfach gekrümmte (homogene) Linie AB (Fig. 21 auf Seite 68) sich um die in ihrer Ebene liegende Achse OX dreht, so beschreibt sie eine Rotationsfläche, deren Inhalt sich ergiebt, wenn man die Länge der Linie mit der Länge des von ihrem Schwerpunkte durchlaufenen Weges multiplicirt.

*) Bezüglich der ersten Veröffentlichung desselben sehe man: Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie; Band 1 (vom Jahre 1870), Seite 241.

II. Dreht sich die ebene (homogene) Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ (Fig. 23 auf Seite 71) um die Achse OX, so ist das Volumen des hierdurch beschriebenen Rotationskörpers gleich dem Inhalte jener Fläche multiplicirt mit der Länge des Schwerpunktsweges derselben.

Es soll dieser Doppelsatz unter Benutzung bestimmter einfacher Integrale für volle Umdrehungen abgeleitet werden; auch soll man angeben, ob er für beliebige Drehwinkel Giltigkeit hat.

Lösung. I. Die Curve AB (Fig. 21) beschreibt bei einer vollen Umdrehung eine Rotationsfläche, deren Inhalt

$$1)\qquad S = 2\pi \int_{x=x_0}^{x=x_1} y\, ds$$

ist (wobei hier und im Folgenden diejenigen Bezeichnungen benutzt sind, welche im § 18 unter B Verwendung fanden).

Andererseits ergiebt sich die Strecke η, um welche der Curvenschwerpunkt von der Drehachse absteht, aus der Gleichung

$$2)\qquad s\eta = \int_{x=x_0}^{x=x_1} y\, ds$$

(welche mit Nr. 10 des § 18 übereinstimmt).

Aus 1 und 2 folgt:

$$3)\qquad S = 2\pi . s\eta = s . 2\pi\eta,$$

also der in der Aufgabe unter I genannte Satz.

II. Der von der Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ (Fig. 23) bei voller Umdrehung erzeugte Rotationskörper hat das Volumen

$$4)\qquad V = \pi \int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\, dx,$$

wenn die im § 18 unter D benutzten Bezeichnungen Verwendung finden.

Andererseits ist die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse durch die Gleichung 26 des § 18 bestimmt. Letztere giebt mit Nr. 4:

$$5)\qquad V = \pi . 2S\eta = S . 2\pi\eta,$$

das ist der unter II in der Aufgabe ausgesprochene Satz.

Die beiden für volle Umdrehungen gefundenen Sätze gelten

offenbar auch für theilweise, da bei den letzteren die beschriebenen Flächen oder Volumina dem Drehwinkel proportional sind. (An die Stelle des in der vorausgegangenen Ableitung vorkommenden Factors π würde $\frac{1}{n}\pi$ treten, wenn Drehungen vorlägen, die nur den n^{ten} Theil von 360^0 betrügen.)

Anmerkung. Es kann der Guldin'sche Doppelsatz auch ohne Integralrechnung abgeleitet werden. Darüber sehe man etwa:

1) Weisbach, Lehrbuch der theoretischen Mechanik; 5. Auflage (von Herrmann), § 129 (wo auch vier sehr gut gewählte Beispiele angeführt sind);
2) Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie; Band 1 (vom Jahre 1870) Nr. 185 (auf Seite 240 und 241).

§ 20. Anziehungen, verursacht durch Linien.

(Vergl. § 34.)

A.

Ziehen sich zwei Punkte, welche die Massen m und m_1 haben, nach dem Newton'schen Gesetze an, so ist

1) $$A = \frac{k m m_1}{u^2}$$

die Wirkung, welche sie auf einander ausüben. Dabei bezeichnet u den Abstand der Punkte und k den Anziehungscoefficienten, nämlich diejenige Kraft, mit welcher die Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 anziehend wirkt.*)

Die Gleichung Nr. 1 ist ein besonderer Fall der allgemeineren

2) $$A = k m m_1 F(u);$$

letztere sagt aus, dass die Anziehung proportional den Massen und irgend einer Function der Entfernung erfolgt.

Geht von Linien, Flächen oder Körpern die betreffende Anziehung aus, so sind die Wirkungen von unendlich

*) Man kann k als die Einheit der Anziehung auffassen, also $k = 1$ setzen, was aber hier und im Folgenden unterbleiben soll.

vielen Massenelementen in Betracht zu ziehen. Das giebt einfache oder mehrfache Integrationen.

Dabei ist gehörig zu beachten, dass Kräfte, welche nach verschiedenen Richtungen wirken, passend durch Componenten zu ersetzen sind,. wenn sie summirt werden sollen.

Mit Benutzung dieser Andeutungen wird es leicht sein, die unter B bis G folgenden Aufgaben zu lösen, welche durch die im § 34 sich anschliessenden die gehörige Ergänzung finden.

Anmerkung. P. Berthot hat für die Kraft A, mit welcher zwei Massenpunkte im Abstande u sich anziehen (oder abstossen), das Gesetz

$$3) \qquad A = k\, m\, m_1 \frac{d - u}{u^3}$$

aufgestellt. Dabei ist d der Abstand, welcher der Gleichgewichtslage, nämlich dem Werthe $A = o$, entspricht, die „distance moléculaire“, von welcher gesagt wird: „d est une Constante de la Nature, c'est à dire a la même valeur pour tous les corps“.

Hat d, mit u verglichen, verschwindend kleinen Werth, so geht die Gleichung 3 in das Newton'sche Gesetz über. Für die zwischen den Molekülen eines Körpers stattfindende Anziehung oder Abstossung hingegen gilt, nach Berthot, das allgemeine Gesetz Nr. 3. Für $u < d$ findet Abstossung der Moleküle statt; für $u > d$ Anziehung.

Durch Behandlung einer grossen Anzahl von Fällen hat der Aufsteller obigen Gesetzes nachzuweisen gesucht, dass dasselbe mit dem thatsächlichen physischen und chemischen Verhalten der Körper übereinstimmt. Näheres: Fortschritte der Mathematik, J. 1884, S. 868; oder: Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie, Bd. 8, S. 792. Ferner: Mémoires de la société des ingénieurs civils, 1885, vol. 2, p. 542 et 588.

Untersuchungen, welche P. Bohl und B. Galitzine anstellten, führten, auf ganz verschiedenen Wegen, zu dem Ergebniss, dass auch die kleinsten Massentheile sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, mithin das den Makrokosmos beherrschende Gesetz auch im Mikrokosmos Giltigkeit hat. Näheres hierüber in den betreffenden Bohl'schen und Galitzine'schen Ab-

handlungen (siehe „Literaturverzeichniss“); oder: Jahrbuch der Erfindungen, Jahrgang 25, S. 83 und 84 (bezügl. der Bohl'schen Untersuchung).

B.

Zunächst soll die Anziehung X berechnet werden, welche eine Gerade AB (Fig. 26) nach dem Newton'schen Gesetze auf einen Punkt P, von der Masse 1, ausübt, wenn derselbe in der Richtung der Geraden liegt und zwar in dem Abstande a von dem Endpunkte B. Der Querschnitt der Geraden sei q, ihre Dichtigkeit (also die in der Volumeneinheit enthaltene Masse) sei ε, die Länge b, wobei q, ε und b als unveränderlich vorausgesetzt werden mögen.

Fig. 26.

A B P

Lösung. Das Linienelement, im Abstande x von B, zieht den Punkt P an mit der Intensität

4) $$dX = \frac{k\,dm}{(a+x)^2},$$

wobei k die unter A genannte Bedeutung hat und m die Masse der Geraden bezeichnet, so dass

5) $$dm = q\,\varepsilon\,dx$$

ist. Aus 4 und 5 folgt:

6) $$X = kq\varepsilon \int_0^b \frac{dx}{(a+x)^2},$$

also

7) $$X = \frac{km}{a(a+b)}.$$

Die ausgeübte Anziehung ist mithin eben so gross, als wenn die Gesammtmasse der Geraden in einem Punkte C vereinigt wäre, der um das geometrische Mittel der Strecken a und $a+b$ von P absteht (also nicht etwa mit dem Schwerpunkte der anziehenden Linie zusammenfällt).

Anmerkung. Man unterlasse nicht, diesen „Anziehungsmittelpunkt“ C durch Construction aufzusuchen.

Ferner wende man die Gleichung 7 an auf den Fall, dass P mit dem Endpunkte B zusammenfällt, oder innerhalb AB liegt; auch auf den, dass b unendlich gross ist. Hierbei ergiebt sich der Satz: Eine unendlich lange Gerade AB wirkt auf den Punkt P so, als ob die zu der Länge a der Geraden gehörende Masse im Abstande a (von P) concentrirt wäre.

C.

Sodann möge die Aufgabe verallgemeinert werden, indem vorausgesetzt wird, die Anziehung sei umgekehrt proportional irgend einer ganzen positiven Potenz der Entfernung (also nicht speciell der 2ten, sondern allgemein der n^{ten}, wobei $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$).

Lösung. Man hat dann:

8) $$X = kq\varepsilon \int_0^b \frac{dx}{(a+x)^n};$$

mithin sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich die Fälle: $n > 1$ (also $n = 2, 3, 4, \ldots$) und $n = 1$.

In dem ersten Falle giebt die Gleichung Nr. 8:

9) $$X = \frac{kq\varepsilon}{n-1}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{a+b}\right)^{n-1}\right\},$$

oder, in anderer Form:

10) $$X = \frac{kq\varepsilon}{n-1} \cdot \frac{(a+b)^{n-1} - a^{n-1}}{[a(a+b)]^{n-1}}.$$

Für $n = 2$ liefert dies den unter Nr. 7 angeführten Werth; für $n = 3$ giebt es:

11) $$X = \frac{kq\varepsilon}{2}\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a+b}\right)^2\right\}$$

u. s. w.

In dem zweiten Falle ($n = 1$) liefert die Gleichung Nr. 8:

12) $$X = kq\varepsilon \; l\frac{a+b}{a}.$$

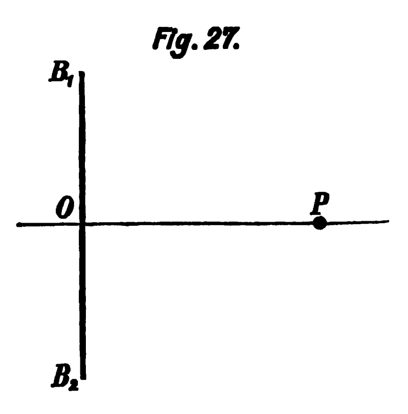
Zu diesem Werthe gelangt man übrigens auch, wenn man Nr. 9 nach denjenigen Regeln behandelt, welche für die Ermitte-

lung der Werthe „vieldeutiger Symbole“ von der Form $\frac{0}{0}$ gelten. (Vergl. Theil I, § 48.)

D.

Ferner soll, indem das Newton'sche Gesetz wieder als geltend angenommen wird, berechnet werden, mit welcher Intensität R und nach welcher Richtung die Gerade B_1B_2 (Fig. 27) den Punkt P anzieht, der ausserhalb der Linie und zwar in dem senkrechten Abstande $OP = a$ derartig liegt, dass die Länge b der Geraden durch das von P herabgelassene Loth in die Strecken $OB_1 = b_1$ und $OB_2 = b_2$ zerfällt.

Die Masse des angezogenen Punktes P möge wieder gleich 1 sein. Die Dichtigkeit ε und der Querschnitt q der anziehenden Linie sollen, wie vorher, als unveränderlich vorausgesetzt werden.



Ferner möge ein Coordinatensystem Benutzung finden, dessen positive X-Achse mit OP und dessen positive Y-Achse mit OB_1 zusammenfällt.

Lösung. Das von O um y abstehende Element der Geraden übt auf den Punkt P die Anziehung

$$13)\qquad dR = \frac{kq\varepsilon}{a^2 + y^2}\, dy$$

aus. Sie giebt zwei den Coordinatenachsen gleichgerichtete Componenten, nämlich im Sinne der positiven Abscissen:

$$14)\qquad dX_1 = -\frac{kaq\varepsilon}{\sqrt{a^2+y^2}^3}\, dy$$

und in dem der positiven Ordinaten:

$$15)\qquad dY_1 = +\frac{kq\varepsilon y}{\sqrt{a^2+y^2}^3}\, dy.$$

Aus Nr. 14 folgt durch Integration innerhalb der Grenzen 0 und b_1:

16) $$X_1 = -\frac{kq\varepsilon}{a} \cdot \frac{b_1}{\sqrt{a^2 + b_1^2}}$$

als diejenige Anziehung, welche die Strecke OB_1 auf P im Sinne der positiven x äussert.

Der für OB_2 geltende Werth X_2 ist hiermit auch bekannt.

Aus X_1 und X_2 ergiebt sich für die von der ganzen Geraden $B_1 B_2$ im Sinne der positiven Abscissen hervorgerufene Anziehung der Betrag

17) $$X = -\frac{kq\varepsilon}{a}\left(\frac{b_1}{\sqrt{a^2 + b_1^2}} + \frac{b_2}{\sqrt{a^2 + b_2^2}}\right).$$

Bezeichnet man mit m_1 und m_2 die Massen der Strecken OB_1 und OB_2, ferner mit c_1 und c_2 die Entfernungen PB_1 und PB_2, so nimmt Nr. 17 die einfachere Form

18) $$X = -\frac{k}{a}\left(\frac{m_1}{c_1} + \frac{m_2}{c_2}\right)$$

an. Werden die Winkel $B_1 PO$ und $B_2 PO$ beziehungsweise β_1 und β_2 genannt, so lässt sich, statt 18, schreiben:

19) $$X = -\frac{kq\varepsilon}{a}(\sin\beta_1 + \sin\beta_2).$$

Ferner liefert die Integration der Gleichung 15 für die von OB_1 im Sinne der positiven y ausgeübte Anziehung den Betrag

20) $$Y_1 = kq\varepsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b_1^2}}\right).$$

Hieraus folgt für die von $B_1 B_2$ in jenem Sinne hervorgerufene Wirkung:

21) $$Y = kq\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b_1^2}}\right),$$

was auch, wenn man mit m die Masse der ganzen Geraden bezeichnet, in der Form

22) $$Y = \frac{km}{b}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)$$

gegeben werden kann; oder, Nr. 19 entsprechend, in der Form

23) $$Y = \frac{kq\varepsilon}{a}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1).$$

Aus den Werthen von X und Y ergiebt sich

24) $$R = \frac{2kq\varepsilon}{a}\sin\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

als Gesammtbetrag der von der Geraden $B_1 B_2$ auf den Punkt P ausgeübten Anziehung.

Für den Winkel φ, unter welchem R gegen PO geneigt ist, findet man:

25) $$\varphi = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2);$$

es wirkt mithin die Anziehung in der Richtung der Halbirungslinie des Winkels $B_1 P B_2$.

Anmerkungen zu D:

I. Das Vorhergehende führt zu den nachstehenden Ergebnissen (α und β), deren Herleitung empfohlen sein möge:*)

α) Der Anziehungsmittelpunkt der Geraden $B_1 B_2$ (also derjenige Punkt, in welchem die Masse m vereinigt werden müsste, wenn sie auf P so wirken sollte, wie bei ihrer Vertheilung längs $B_1 B_2$) liegt selbstverständlich in der Richtung von R (Gl. 25) und steht von P ab um die Strecke

26) $$r = \sqrt{\tfrac{1}{2}\, ab \csc \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)},$$

welche als geometrisches Mittel construirt werden kann.

β) Erstreckt sich die Gerade $B_1 B_2$ nach oben und unten ins Unendliche, so fällt R in die Richtung der (negativen) X-Achse und hat den (absoluten) endlichen Werth

27) $$R = \frac{2kq\varepsilon}{a}.$$

Es ist also dann die Anziehung eben so gross, als wenn die zu der Länge $2a$ gehörende Masse der Geraden in dem Punkte O vereinigt wäre. Das steht in sehr einfacher Beziehung zu dem Satze, welcher am Schlusse des Abschnittes B (auf Seite 82) ausgesprochen wurde.

II. Die mathematische Untersuchung der Wirkung eines Magnetstabes auf eine Magnetnadel hat, unter gewissen Voraussetzungen, engen Zusammenhang mit Dem, was in dem Abschnitte D behandelt wurde. Man sehe hierüber: Wiedemann, die Lehre von der Elektricität, Bd. 3, S. 403.

*) Literatur: Fuhrmann, Aufgaben a. d. analyt. Mechanik, Th. I, Seite 127 und 128 der 2. Auflage. — Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Seite 660 und 661 der ersten Auflage, oder Band 2, Seite 282—284 der zweiten.

E.

Ein materieller Kreisbogen AB (Fig. 28) hat den Halbmesser $CA = a$, den Centriwinkel $ACB = \gamma$, den unveränderlichen Querschnitt q, die constante Dichtigkeit ε. Er zieht das Kreiscentrum C, welches als Punkt von der Masse 1 vorausgesetzt wird, nach dem Newton'schen Gesetze an. Man soll

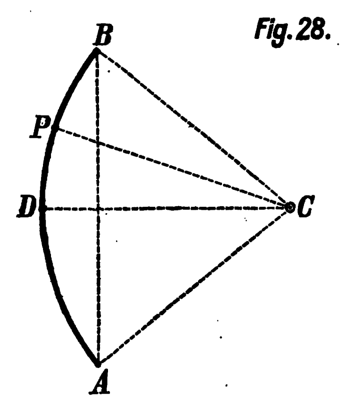


Fig. 28.

I. die Intensität und die Richtung dieser Anziehung berechnen, dann aber das Ergebniss mit Bezugnahme auf die Sehne AB deuten; man soll

II. angeben, wo derjenige Punkt M liegt, in welchem vereinigt die Masse m des Kreisbogens dieselbe Anziehung äussern würde, welche sie bei der thatsächlich vorhandenen Vertheilung (längs des Bogens) ausübt; man soll

III. berechnen, wie weit M von dem Schwerpunkte S des Kreisbogens absteht; endlich soll man

IV. das unter I bis III Gefundene auf den Halbkreis anwenden (und dabei die gesuchten Strecken auf drei Decimalen abgerundet ermitteln).

Lösung. I. Die Anziehung wirkt im Sinne CD und hat die Intensität

28) $$R = \frac{kq\varepsilon}{a} \int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{+\frac{1}{2}\gamma} \cos\omega \, d\omega\,.$$

Dabei ist ω die Anomalie DCP des allgemeinen Punktes P des Kreisbogens, k aber, wie in den Lösungen der vorhergehenden Aufgaben, der Anziehungscoefficient.

Aus Gleichung 28 folgt:

29) $$R = \frac{2kq\varepsilon}{a} \sin \tfrac{1}{2}\gamma\,.$$

Dies lässt sich leicht umformen in

$$30)\qquad R = \frac{k\,m}{a^2} \cdot \frac{s}{b},$$

wobei s die Länge der Sehne AB, b diejenige des Bogens AB bedeutet. Man hat also den Satz: Die Intensität (R) derjenigen Anziehung, welche die längs des Kreisbogens AB vertheilte Masse m auf das Centrum C äussert, verhält sich zu der, welche diese Masse äussern würde, falls sie im Halbirungspunkte D des Bogens vereinigt wäre, wie die Länge der Sehne zu der des Bogens.

Die Gleichung 29 lässt sich auch in der Form

$$31)\qquad R = \frac{k\,m_1}{a^2}$$

geben, in welcher m_1 die Masse der Sehne AB bedeutet, falls letztere (wie der Kreisbogen) mit dem Querschnitt q und der Dichtigkeit ε versehen gedacht wird. Man kann daher den vorstehenden Satz auch folgendermassen fassen: Die durch den homogenen Kreisbogen AB auf den Mittelpunkt C ausgeübte Anziehung ist (nach Grösse und Richtung) gleich derjenigen, welche die Masse m_1 der Sehne AB auf C äussern würde, falls sie in dem Halbirungspunkte D des Bogens vereinigt wäre.*)

II. Der gesuchte Punkt M liegt auf der Halbirungslinie des Centriwinkels und hat vom Mittelpunkte den Abstand

$$32)\qquad \varrho = \sqrt{\frac{b}{s}}\,a;$$

es verhält sich also das Quadrat dieses Abstandes zu dem des Radius, wie die Länge des Bogens zu derjenigen der Sehne.

III. Vom Schwerpunkte S steht der Punkt M ab um die Strecke

$$33)\qquad \sigma = \frac{b\sqrt{b} - s\sqrt{s}}{b\sqrt{s}}\,a.$$

IV. Die Anziehung, welche der Halbkreis ausübt, ist

*) Bezüglich einer sehr einfachen elementaren (ohne Integralrechnung ausgeführten) Ableitung dieses Satzes sehe man: Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Seite 659 der ersten Auflage, oder Band 2, Seite 282 der zweiten.

34) $$R = \frac{2kq\varepsilon}{a}.$$

Dabei liegt der Punkt M in dem Abstande

35) $$\varrho = 1{,}253\, a$$

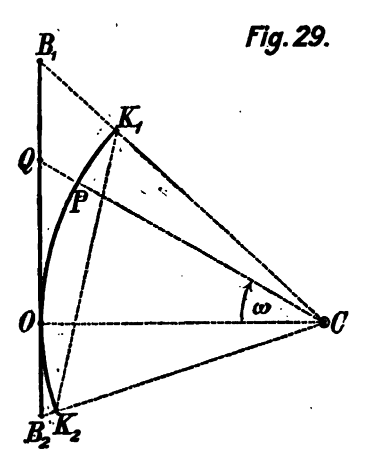
vom Centrum C und hat vom Schwerpunkte, dessen Lage leicht aus § 18, B, folgt, die Entfernung

36) $$\sigma = 0{,}616\, a.$$

F.

Zur Ergänzung des unter D und E Behandelten möge folgende Aufgabe dienen:

Aus dem Punkte C (Fig. 29) ist mit dem Halbmesser CO (gleich a) ein Kreisbogen $K_1 K_2$ geschlagen, dessen Enden K_1 und K_2 in den Richtungen CB_1 und CB_2 liegen. Die Tangente $B_1 B_2$ und der genannte Bogen haben übereinstimmenden Querschnitt (q) und übereinstimmende Dichtigkeit (ε).



Es soll berechnet werden, welche Beziehung zwischen denjenigen Anziehungen besteht, die einerseits die Gerade $B_1 B_2$ und andererseits der Kreisbogen $K_1 K_2$ nach dem Newton'schen Gesetze auf das Centrum C ausüben.

Lösung. Durch Vergleichung der Anziehungen, welche von den bei P und Q liegenden, zu $d\omega$ gehörenden, Linienelementen auf C geäussert werden, gelangt man leicht zu dem Satze: Die von dem Kreisbogen $K_1 K_2$ auf das Centrum C ausgeübte Anziehung ist (nach Grösse und Richtung) derjenigen gleich, welche die Gerade (Tangente) $B_1 B_2$ auf C ausübt. *)

*) Vergleiche: Schell, Theorie der Bewegung u. s. w., Seite 660 der ersten Auflage, oder Bd. 2, Seite 283 der zweiten.

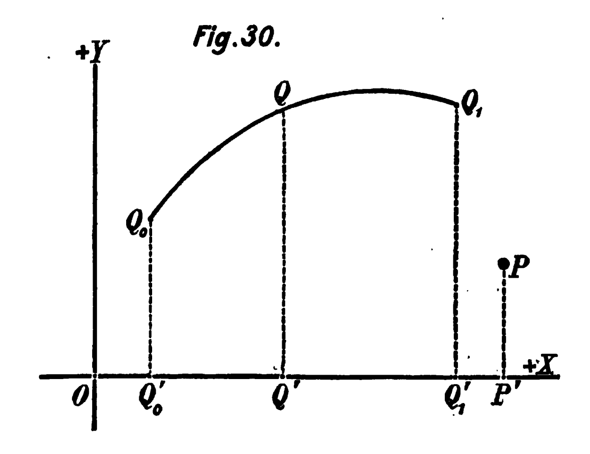
Der Halbkreis z. B. äussert dieselbe Anziehung, wie die unendlich lange zur Halbirenden seines Centriwinkels gehörende Tangente. (Gleichung 34 und 27.)

Anmerkung. Mit Benutzung der Lösung der unter E vorhergehenden Aufgabe kann man hinzufügen: Die Anziehung, welche die Gerade $B_1 B_2$ auf den Punkt C ausübt, ist derjenigen gleich, welche die Masse der Sehne $K_1 K_2$ des Kreisbogens $K_1 OK_2$ auf C äussern würde, wenn sie im Halbirungspunkte des genannten Bogens vereinigt wäre.

Dies bildet eine Ergänzung zu D.

G.

Nachdem unter B — F Anziehungen ermittelt worden sind, welche durch gerade Linien und Kreisbögen erfolgen, soll nun die durch eine allgemeine Curve bewirkte Anziehung untersucht werden, indem folgende Aufgabe Behandelung findet:



Die einfach gekrümmte Linie $Q_0\, Q\, Q_1$ hat, bezogen auf das durch Fig. 30 veranschaulichte Coordinatensystem, die Gleichung

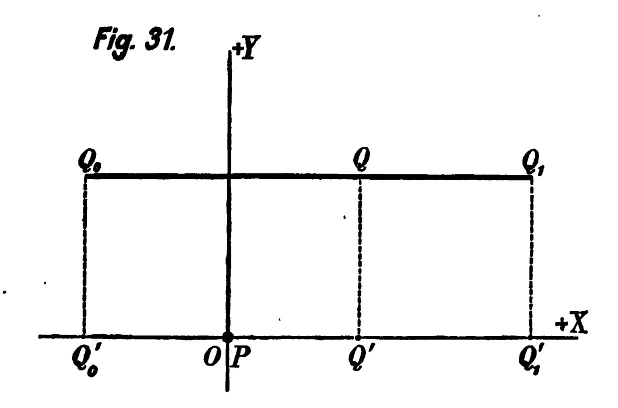
37) $$y = f(x);$$

dabei den constanten Querschnitt q, die constante Dichtigkeit ε, die Anfangsabscisse $O\, Q'_0 = x_0$, die Endabscisse $O\, Q'_1 = x_1$.

Es wirkt jene Linie anziehend auf den festen Punkt P und zwar nach dem Newton'schen Gesetze. Der Punkt ist ge-

geben durch die Coordinaten $OP' = a$, $P'P = b$ und hat die Masse 1.

Man soll die Anziehung R, welche P durch die Curve $Q_0 Q Q_1$ erleidet, berechnen (analytisch ausdrücken) und zwar sowohl bezüglich der Grösse, als auch bezüglich der Richtung unter den durch die Fig. 30 angedeuteten Voraussetzungen.



Hierauf sollen die Ergebnisse auf denjenigen besonderen Fall angewendet werden, in welchem P mit dem Coordinatenanfange O zusammenfällt und die Curve $Q_0 Q Q_1$ eine Gerade ist (Fig. 31), die der X-Achse gleichgerichtet, im Abstande $Q'_0 Q_0 = c$, derartig liegt, dass die Strecken OQ'_0 und OQ'_1 die Längen b_2, bezüglich b_1, haben.

Lösung. In der unter D angegebenen Weise erhält man leicht Folgendes:

Die Anziehung, welche der Punkt P im Sinne der positiven x erleidet, hat den Werth

$$38)\qquad X = -kq\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \frac{(a-x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}^3},$$

wobei k (wie vorher) den Anziehungscoefficienten bezeichnet und y' den Differentialquotienten von y in Bezug auf x.

Ferner ist

$$39)\qquad Y = kq\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \frac{(y-b)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}^3}$$

die von der Curve $Q_0 Q Q_1$ auf den Punkt P in der Richtung der positiven y ausgeübte Wirkung.

Die Gesammtanziehung R, welche P erfährt, ergiebt sich aus 38 und 39 mittelst der Gleichung

40) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Der von R mit der positiven Seite der Abscissenachse gebildete Winkel, welcher ω heissen möge, ist bestimmt durch:

41) $$\cos\omega = \frac{X}{R}.$$

Fällt der angezogene Punkt mit dem Coordinatenanfange zusammen, so gehen die Gleichungen Nr. 38 und 39 über in die einfacheren:

42) $$X = kq\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \frac{x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

und

43) $$Y = kq\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \frac{y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}^3}.$$

Wird ferner die Curve $Q_0 Q Q_1$ zu der in der Fig. 31 angegebenen geraden Linie, so ergeben sich aus 42 und 43 die Werthe:

44) $$X = kq\varepsilon \int_{b_2}^{b_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{c^2+x^2}^3},$$

45) $$Y = kq\varepsilon \int_{-b_2}^{b_1} \frac{c\,dx}{\sqrt{c^2+x^2}^3}.$$

Damit kommt die Sache auf das unter D Behandelte zurück, was man durch Vergleichen von 44 und 45 mit 15 und 14 sofort erkennt.

§ 21. Trägheitsmomente.

A.

Unter dem auf eine Achse UV bezogenen Trägheitsmomente (Drehungs- oder Massenmomente) T eines materiellen Punktes P versteht man bekanntlich dasjenige Produkt, welches aus der Masse m dieses Punktes und dem Quadrate seines Abstandes r von jener Achse gebildet ist.

Liegt ein System von materiellen Punkten vor, so ergiebt sich das Trägheitsmoment desselben durch Summirung der einzelnen Momente. Für Körper, wie auch für materielle Flächen und Linien, ist diese Summirung eine Integration.

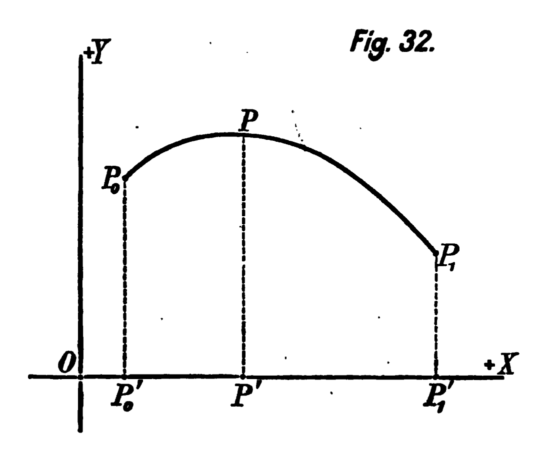
Im Nachfolgenden (unter B—G) sollen zunächst einige Fälle behandelt werden, in denen die zu addirenden Elemente nur einen unendlich kleinen Faktor enthalten, mithin die Integration eine einfache ist; im § 33 folgt die Berechnung von Trägheitsmomenten unter Benutzung mehrfacher Integrale.

Oft wird im Nachstehenden für die betreffenden Linien, Flächen oder Körper auch der Trägheitshalbmesser (ϱ) verlangt, nämlich diejenige Entfernung (von der Drehachse), in welcher die Masse des Systems vereinigt sein müsste, wenn sie dasjenige Trägheitsmoment haben sollte, welches sie thatsächlich hat. —

Ueber die Beziehung der Trägheitsmomente zur Mechanik und Physik sehe man, wenn nöthig, die im „Literaturverzeichniss" genannten Lehrbücher von Duhamel, Schell, Voigt, Weisbach oder Wüllner (Bd. 1, § 19 der 4. Auflage).

B.

Zunächst möge für die homogene ebene Curve P_0PP_1 (Fig. 32) das auf die X-Achse des rechtwinkligen Coordinaten-

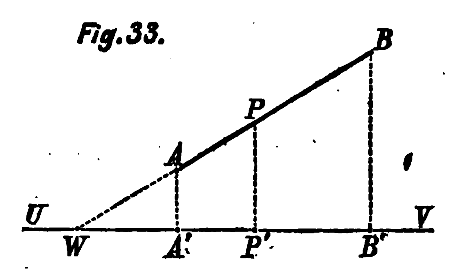


systems bezogene Trägheitsmoment T_x durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden. Dabei sei

$$1)\qquad y = f(x)$$

die Gleichung der Curve, q der constante Querschnitt, ε die Dichtigkeit, x_0 die Anfangsabscisse OP'_0, x_1 die Endabscisse OP'_1.

Die gewonnene Formel soll dann Anwendung finden zur Berechnung des auf die Achse UV (Fig. 33) bezogenen Trägheits-



momentes T einer Geraden AB, welche mit ihrem Anfangspunkte A um die Strecke a von jener Achse absteht und sie, verlängert gedacht, unter dem Winkel ω schneidet. Die Länge der Geraden möge c Einheiten betragen.

Lösung. Das an dem allgemeinen Punkte P (Fig. 32) liegende Curvenelement hat das Trägheitsmoment

2) $$(dm)\,y^2 = (q\,\varepsilon\,ds)\,y^2,$$

wenn m die Masse und s die Bogenlänge der Linie bezeichnet. Aus Nr. 2 folgt:

3) $$T_x = q\,\varepsilon \int\limits_{x=x_0}^{x=x_1} y^2\,ds = q\,\varepsilon \int\limits_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Für die durch die Figur 33 dargestellte Gerade geht die Gleichung Nr. 3, wenn man $A'V$ als X-Achse und $A'A$ als Y-Achse benutzt, über in

4) $$T = q\,\varepsilon \sec\omega \int\limits_0^{c\cos\omega} (x\tan\omega + c)^2\,dx.$$

Die Durchführung der Integration liefert:

5) $$T = \frac{1}{3}\,m\,(3a^2 + 3ac\sin\omega + c^2\sin^2\omega),$$

wobei

6) $$m = q\,c\,\varepsilon$$

ist.

Anmerkungen zu B:

I. Nimmt man den Punkt W der Fig. 33 als Coordinatenanfang, so ergiebt sich, an Stelle der Gleichung 4:

$$7)\qquad T = q\,\varepsilon \tan^2\omega \sec\omega \int_{a\cot\omega}^{a\cot\omega + c\cos\omega} x^2\,d\,x.$$

II. Wird das für Nr. 4 angewendete Coordinatensystem beibehalten, aber $AP = s$ als unabhängige Veränderliche benutzt, so hat man, statt Nr. 4, etwas einfacher:

$$8)\qquad T = q\,\varepsilon \int_0^c (a + s \sin\omega)^2\,d\,s.$$

Ausführung der Integration giebt, bei 7 und 8, wieder die Gleichung 5.

III. Geht die Drehachse UV (Fig. 33) durch den Anfangspunkt A der Geraden, so ist das Trägheitsmoment

$$9)\qquad T = \frac{1}{3} m\,c^2 \sin^2\omega,$$

also der Trägheitshalbmesser

$$10)\qquad \varrho = \frac{c \sin\omega}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} c\sqrt{3} \sin\omega,$$

wobei $c \sin\omega$ der senkrechte Abstand des Endpunktes B von der Achse.

Läuft UV durch den Schwerpunkt von AB, so hat man:

$$11)\qquad T = \frac{1}{12} m\,c^2 \sin^2\omega$$

und

$$12)\qquad \varrho = \frac{c \sin\omega}{2\sqrt{3}}.$$

IV. Man unterlasse nicht, das unter I bis III Gesagte nachzuweisen und die mit 10 und 12 bezeichneten Werthe von ϱ aus c und ω zu construiren.

Ferner wende man Nr. 5 auf diejenigen besonderen Fälle an, in welchen die Gerade AB der Drehachse UV parallel liegt, oder senkrecht zu ihr steht.

Derartige Sonderfälle kommen in der Mechanik und Physik besonders oft vor; so z. B. bei der Ermittelung der Beschleunigung der Schwere durch Beobachtung von Pendelschwingungen. Man sehe hierüber etwa: Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, S. 127 der 4. Auflage.

C.

Für manche Untersuchungen ist es wünschenswerth, die Beziehung zu kennen, welche zwischen den auf parallele Dreh-

achsen bezogenen Trägheitsmomenten T und T_1 einer ebenen Curve, $P_0 P P_1$ des vorigen Abschnittes, besteht.

Man leite jene Beziehung her unter der Voraussetzung, dass die (in der Ebene der Curve liegenden) Achsen den Abstand k haben. Auch wende man das Ergebniss auf denjenigen besonderen Fall an, in welchem die eine der Drehachsen durch den Schwerpunkt der Linie geht.

Lösung. Lässt man die der Curve näher liegende Drehachse mit der X-Achse des Coordinatensystems (Fig. 32) zusammenfallen und bezeichnet das auf sie bezogene Trägheitsmoment mit T, so gilt für letzteres die Gleichung Nr. 3; hingegen hat man für T_1, welches sich auf die um k unter der X-Achse liegende Parallele bezieht:

13) $$T_1 = q\varepsilon \int_{x=x_0}^{x=x_1} (y + k)^2 \, ds.$$

Mit Benutzung der Gleichung 10 des § 18 (siehe diesen) folgt hieraus:

14) $$T_1 = T + 2km\eta + k^2 m$$

als die zwischen den beiden Trägheitsmomenten stattfindende Beziehung.

Geht die Achse, auf welche T bezogen ist, durch den Schwerpunkt der Curve, so verwandelt sich die Gleichung 14 in die einfachere:

15) $$T_1 = T + k^2 m,$$

welche sehr leicht in Worte gefasst werden kann.

D.

Das unter B Behandelte möge Erweiterung finden, indem die Aufgabe gestellt wird: für eine homogene doppelt gekrümmte Linie, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen ist, die drei für die Systemachsen geltenden Trägheitsmomente T_x, T_y und T_z zu berechnen. Dabei soll die Curve gegeben sein durch die Gleichungen

16) $$y = f(x)$$

ihres Grundrisses und

17) $$z = \varphi(x)$$

ihres Aufrisses. Ferner möge ihre Bogenlänge s von $x = x_0$ bis $x = x_1$ gemeint sein.

Lösung. Es ergiebt sich sehr leicht:

18) $$T_x = q\varepsilon \int_{x=x_0}^{x=x_1} (y^2 + z^2)\, ds,$$

19) $$T_y = q\varepsilon \int_{x=x_0}^{x=x_1} (x^2 + z^2)\, ds,$$

20) $$T_z = q\varepsilon \int_{x=x_0}^{x=x_1} (x^2 + y^2)\, ds,$$

in welchen Gleichungen q und ε die frühere Bedeutung haben und

21) $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

ist. Die Werthe von y und z, wie auch die der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, sind in jedem besonderen Falle den Gleichungen 16 und 17 zu entnehmen und in 18—20 einzuführen, worauf die Integration erfolgen kann.

Anmerkung. In Bezug auf Beispiele sehe man: Fuhrmann, Aufgaben a. d. analyt. Mechanik, Th. I, S. 155 u. 156 der 2. Auflage.

E.

Der Behandlung der Trägheitsmomente von Linien möge nun diejenige der Umdrehungsflächen angeschlossen werden und zwar durch folgende Aufgabe: In der Ebene zweier sich rechtwinklig schneidenden Achsen OX und OZ (Fig. 34) hat man eine Curve $P_0 P_1$ durch die Gleichung

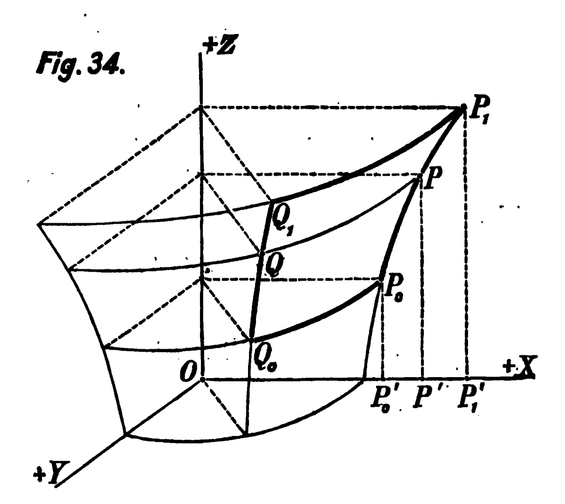
22) $$z = f(x)$$

gegeben, wobei $OP' = x$, $P'P = z$ ist.

Die Bogenlänge $s = P_0 P_1$ kommt von $OP'_0 = x_0$ bis $OP'_1 = x_1$ in Betracht. Es dreht sich jene Curve um die Achse OZ und erzeugt dadurch die Fläche $P_0 Q_0 Q_1 P_1$. Der Drehwinkel ist ω; die Dicke δ und die Dichtigkeit ε der genannten Rotationsfläche sind unveränderlich.

Man soll das auf OZ bezogene Trägheitsmoment T_z und den zugehörigenen Trägheitshalbmesser ϱ_z durch bestimmte Integrale ausdrücken.

Auch soll das Ergebniss auf denjenigen besonderen Fall Anwendung finden, in welchem die Curve $P_0 P_1$ ein gegen die Achsen convexer Viertelkreis ist, welcher dieselben mit seinen Endpunkten berührt und um OZ eine volle Umdrehung macht.



Lösung. Unter Benutzung gürtelförmiger Flächenelemente erhält man

$$23)\qquad T_z = \delta\,\varepsilon\,\omega \int_{x_0}^{x_1} x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

und dann

$$24)\qquad \varrho_z = \sqrt{\frac{T_z}{m}},$$

wobei m die Masse der Fläche $P_0\, Q_0\, Q_1\, P_1$ bezeichnet, also

$$25)\qquad m = \delta\,\varepsilon\,\omega \int_{x_0}^{x_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

ist.

Wenn der in der Aufgabe genannte besondere Fall vorliegt und der Halbmesser des Viertelkreises a genannt wird, so tritt

$$26)\qquad z = a - \sqrt{x\,(2\,a - x)}$$

an die Stelle von Nr. 22. Ferner gehen die Gleichungen 23 und 25 über in:

27) $$T_z = 2\pi\delta\varepsilon a \int_0^a \frac{x^3}{\sqrt{x(2a-x)}}\,dx$$

und

28) $$m = 2\pi\delta\varepsilon a \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x(2a-x)}}\,dx.$$

Behandelt man die rechten Seiten derselben (welche übrigens noch etwas umformbar sind) in einer der bekannten für die Integration irrationaler algebraischer Functionen geltenden Weisen*), so ergiebt sich:

29) $$T_z = \frac{1}{6}\pi(15\pi - 44)\,\delta\varepsilon a^4$$

und

30) $$m = \pi(\pi - 2)\,\delta\varepsilon a^2,$$

also

31) $$\varrho_z = \sqrt{\frac{15\pi - 44}{6(\pi - 2)}}\,a.$$

F.

Zum Schlusse möge (unter F und G) die Ableitung der Trägheitsmomente einiger Körper folgen, nachdem vorher (unter B—E) die von Linien und Flächen behandelt wurde.

Zunächst sei folgende Aufgabe gestellt: Ein hohler Kreiscylinder hat den äusseren Halbmesser a, den inneren b, die Höhe h, die Dichtigkeit ε. Man soll (durch einfache Integration)

I. das auf seine Achse bezogene Trägheitsmoment T berechnen,

II. das Ergebniss auf den besonderen Fall des massiven Cylinders anwenden. Auch soll man

III. für beide Fälle die Werthe der Trägheitshalbmesser (ϱ_1, ϱ_2) ableiten und angeben, wie sie sich (aus den Strecken a und b, bezüglich a allein) construiren lassen.

*) Schlömilch, Compendium der höh. Analysis, Bd. 1, § 71 und 72 der 5. Auflage. — Stegemann, Grundriss der Diff. u. Int., Th. II, § 21 u. folg. der 4. Auflage (von L. Kiepert). — Minding, Sammlung von Integraltafeln, S. 103.

L ö s u n g. Als Massenelement einen Hohlcylinder benutzend, dessen innerer Halbmesser r und dessen äusserer Halbmesser $r + dr$ ist, hat man:

32) $$T = 2\pi\varepsilon h \int_b^a r^3 dr.$$

Hieraus folgt:

33) $$T = \frac{1}{2}\pi\varepsilon(a^4 - b^4)h = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)m,$$

wobei m die Masse des hohlen Cylinders bezeichnet.

Wenn Letzterer nicht hohl ist, sondern m a s s i v, so hat das Trägheitsmoment den Werth

34) $$T = \frac{1}{2}a^2 m,$$

ist mithin eben so gross, als ob die H ä l f t e der Cylindermasse im Abstande a (auf der Mantelfläche) angesammelt wäre.

Für die T r ä g h e i t s h a l b m e s s e r ergiebt sich:

35) $$\varrho_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2)} = 0{,}707\sqrt{a^2 + b^2},$$

bezüglich

36) $$\varrho_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,a = 0{,}707\,a,$$

auf drei Decimalstellen abgerundet.

Nr. 35 ist als Hypotenuse, Nr. 36 als geometrisches Mittel construirbar, was ausgeführt werden möge.

G.

Bei sehr vielen naturwissenschaftlichen oder technischen Untersuchungen braucht man das T r ä g h e i t s m o m e n t der Kugel für eine durch den Mittelpunkt gehende Drehachse. (In der Physik z. B. wenn die B e s c h l e u n i g u n g d e r S c h w e r e durch Beobachtung von P e n d e l s c h w i n g u n g e n ermittelt werden soll*).

Es möge jenes Trägheitsmoment (T) Herleitung finden, indem man sich die (homogene) Kugel aus unendlich dünnen, zur Drehachse senkrecht liegenden Scheiben zusammengesetzt denkt und den oben in der Gleichung Nr. 34 gewonnenen Satz benutzt.

*) W ü l l n e r, Experimentalphysik, Bd. 1, S. 124 u. 128 der 4. Aufl.

Ferner möge der Trägheitshalbmesser (ϱ) berechnet werden. Endlich soll man beide Ergebnisse auf die Hohlkugel anwenden.

Lösung. Wird mit ε die Dichtigkeit der Kugel bezeichnet, mit a der Halbmesser, mit z der senkrechte Abstand von der Aequatorebene, so ist

$$37)\qquad T = \pi\varepsilon\int_0^a (a^2 - z^2)^2\, dz.$$

Das giebt:

$$38)\qquad T = \frac{8}{15}\pi\varepsilon a^5,$$

oder, wenn m die Masse der Kugel bedeutet,

$$39)\qquad T = \frac{2}{5} m a^2.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel ist also eben so gross, als ob $^2/_5$ der Kugelmasse in dem Abstande a (auf der Oberfläche) zusammengedrängt wären.

Für den Trägheitshalbmesser hat man:

$$40)\qquad \varrho = \sqrt{0{,}4}\, a = 0{,}632\, a,$$

wenn auf drei Decimalstellen abgerundet wird.

Liegt eine Hohlkugel vor, deren äusserer Halbmesser a, deren innerer b und deren Masse wieder m heissen möge, so ist das Trägheitsmoment

$$41)\qquad T = \frac{8}{15}\pi\varepsilon(a^5 - b^5) = \frac{2}{5} m \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3},$$

also der Trägheitshalbmesser

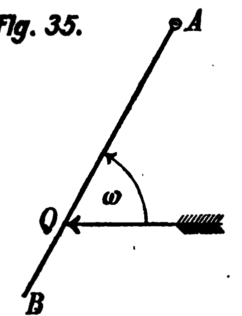
$$42)\qquad \varrho = \sqrt{\frac{2(a^5 - b^5)}{5(a^3 - b^3)}}.$$

Anmerkung. So wie im Vorstehenden die Kugel behandelt worden ist, können, was man leicht erkennt, alle Umdrehungskörper behandelt werden (nämlich durch Zuhilfenahme der Gleichung 34 von S. 99).

§ 22. Gleichgewicht einer drehbaren Geraden.

Eine homogene starre Gerade AB (Fig. 35) ist, ohne Reibung, drehbar um ihren festen Anfangspunkt A. Auf jedes Längenelement ($du = dAQ$) dieser Geraden wirkt, horizontal nach links, eine

Kraft, welche derartig von der Länge des Elementes und von dem gegen die Kraftrichtung gemessenen Neigungswinkel ω abhängt, dass sie stets ein constantes Vielfaches, nämlich das P-fache, der Verticalprojection der Elementslänge ist (also desto grösser, je näher sich die Gerade der verticalen Lage befindet).



Ausserdem wirkt auf jedes Element sein Gewicht senkrecht nach unten.

Die Gerade hat die Länge $AB = a$ und das Gesammtgewicht G.

Man soll berechnen, für welchen Winkel ω das Letztgenannte die unendlich vielen horizontal wirkenden Kräfte im Gleichgewichte hält.

Das Ergebniss soll angewendet werden zur Bildung einer für ω näherungsweise dann geltenden Formel, wenn P, mit G verglichen, sehr gross ist, also $\frac{G}{P}$ sehr klein, nämlich derartig, dass das Quadrat dieses Verhältnisses gleich Null gesetzt werden darf.

Lösung. Die auf verschiedene Weisen leicht ausdrückbare Gleichgewichtsbedingung liefert, gehörig vereinfacht, die Beziehung

1) $$G \cos \omega = a P \sin^2 \omega.$$

Aus Letzterer folgt für den gesuchten Winkel (der positiv und spitz sein muss, was die Anschauung lehrt)

2) $$\cos \omega = \frac{\sqrt{4a^2P^2 + G^2} - G}{2aP}$$

und

3) $$\sin^2 \omega = \frac{G(\sqrt{4a^2P^2 + G^2} - G)}{2a^2P^2}.$$

Ist P, mit G verglichen, so gross, dass $\left(\frac{G}{P}\right)^2$ vernachlässigt werden darf, so hat man näherungsweise

4) $$\cos \omega = 1 - \frac{G}{2aP}$$

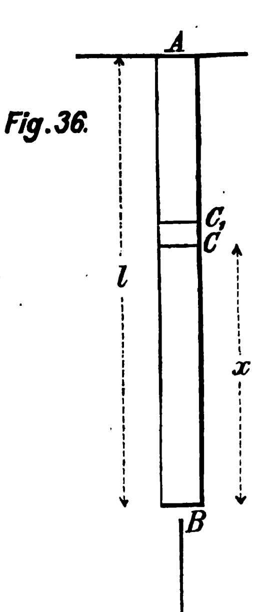
und

5) $$\sin \omega = \sqrt{\frac{G}{aP}}.$$

(Nr. 4 folgt aus 5 unter Beachtung der auf Seite 132 des I. Theiles stehenden Näherungsformel Nr. 6.)

§ 23. Dehnung durch Eigengewicht.

Es sei AB (Fig. 36) ein stabförmiger, senkrecht aufgehängter, am oberen Ende befestigter Körper. In ungedehntem Zustande möge er die Länge $AB = l$ und die Querschnittsfläche F haben; ferner soll γ das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers bezeichnen.



Wird derselbe durch eine Kraft P gespannt, so erleidet er (unter gewissen Voraussetzungen, die man in der elementaren Elasticitätslehre zu machen pflegt) bekanntlich die Dehnung

$$1) \qquad \lambda = \frac{Pl}{EF}.$$

Dabei bedeutet E den Elasticitätsmodul, also die Kraft, welche ein Prisma vom Querschnitte 1 um seine eigene Länge dehnen würde, falls das ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre*).

Die Gleichung Nr. 1, welche als bekannt vorausgesetzt werden möge, lässt sich benutzen, um diejenige Dehnung, λ, zu berechnen, welche der stabförmige Körper dann erleidet, wenn nur sein eigenes Gewicht,

$$2) \qquad G = Fl\gamma,$$

spannend auf ihn wirkt. Es kann nämlich mittelst jener Gleichung zunächst die Dehnung, $d\lambda$, angegeben werden, welche ein unendlich kurzes Körperstück von der Länge

$$CC_1 = dx$$

durch das unter ihm hängende Gewicht des Körpertheiles BC (veränderliche Länge x) erfährt. Hierauf aber lässt sich, durch Integration, die Gesammtdehnung, λ, des Körpers AB ermitteln.

Es soll Letztere auf diesem Wege hergeleitet und dann mit derjenigen Dehnung, λ_1, verglichen werden, welche der stabförmige Körper erleiden würde, wenn sein Gewicht G nicht über die Länge

---

*) Näheres: Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, § 210 der 5. Aufl.

l vertheilt, sondern am unteren Ende, bei B, als Belastung angebracht wäre.

Ferner soll man angeben, durch was für eine Linie das für die Dehnung gefundene Gesetz sich bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten darstellen lässt.

Endlich sei zu berechnen, wie sich diejenigen Dehnungen (λ_2, λ_3, λ_4), welche das untere, das mittlere und das obere Drittel des Körpers erleiden, zu einander verhalten.

Lösung. Das Körperstück $C C_1$ (Länge dx) erleidet durch das unter ihm hängende Gewicht $(F x \gamma)$, entsprechend der Gleichung Nr. 1, die Dehnung

$$3) \qquad d\lambda = \frac{(F x \gamma)\, d x}{EF} = \frac{\gamma}{E}\, x\, d x.$$

Hieraus folgt, durch Integration, für diejenige Dehnung, λ_x, welche BC erfährt:

$$4) \qquad \lambda_x = \frac{\gamma}{2E} x^2;$$

ferner für die dem ganzen Körper AB ertheilte:

$$5) \qquad \lambda = \frac{\gamma}{2E} l^2,$$

oder, anders dargestellt,

$$6) \qquad \lambda = \frac{\frac{1}{2} G}{EF}\, l.$$

Wäre das Gewicht G nicht über die Länge l vertheilt, sondern an dem Ende B (als Belastung) angebracht, so würde es (laut Gleichung 1) die Dehnung

$$7) \qquad \lambda_1 = \frac{G l}{EF}$$

erzeugen. Es besteht also die einfache Beziehung

$$8) \qquad \lambda = \frac{1}{2} \lambda_1.$$

Das durch die Gleichung Nr. 4 ausgedrückte Dehnungsgesetz wird, wenn man die Veränderlichen x und λ_x als rechtwinklige Coordinaten auffasst, durch eine gemeine Parabel dargestellt. Ihre Achse fällt zusammen mit der der Ordinaten (λ_x); ihr Scheitel mit dem Coordinatenanfange; der Halbparameter hat den Werth $\frac{E}{\gamma}$.

Für die Dehnungen, welche in der Aufgabe mit λ_2, λ_3 und λ_4 bezeichnet worden sind, liefert die Gleichung Nr. 4 die Beziehung

9) $$\lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = 1 : 3 : 5,$$

weil sich die Werthe der λ_x wie die Quadrate der x verhalten.

§ 24. Mechanische Arbeit bei der durch Eigengewicht verursachten Dehnung.

Im Anschlusse an das Vorhergehende hat man leicht Folgendes: Das unter dem Körperstück

$$CC_1 = dx,$$

Fig. 36, hängende Gewicht $Fx\gamma$ dehnt ersteres nach und nach um die Strecke

1) $$d\lambda = \frac{\gamma x}{E} dx,$$

laut Gleichung 3 von S. 103. Die hierbei aufgewendete mechanische Arbeit ist bekanntlich*) gleich $\frac{1}{2} Fx\gamma . d\lambda$.

Dies aus der Physik oder Mechanik als bekannt voraussetzend, soll man diejenige Arbeit, L, berechnen, welche der stabförmige Körper AB in sich aufnimmt, indem er durch sein Eigengewicht die Dehnung λ erleidet.

Dabei soll L angegeben werden

I. ausgedrückt durch E, F, γ und l,
II. „ „ G und λ,

wobei die genannten Grössen dieselbe Bedeutung haben, wie im vorhergehenden Paragraphen.

Lösung. Man hat:

2) $$dL = \frac{F\gamma^2}{2E} x^2 dx;$$

mithin, durch Integration,

3) $$L = \frac{\gamma^2 F l^3}{6E},$$

oder

4) $$L = \frac{1}{3} G\lambda,$$

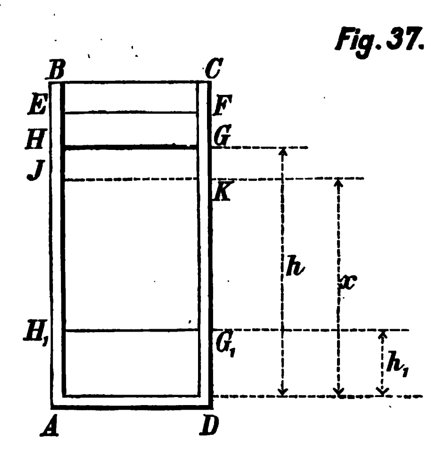
was, in Worte gefasst, einen sehr einfachen Satz giebt.

*) Näheres: Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, S. 393 der 5. Aufl.

§ 25. Arbeit beim Zusammendrücken der Luft.

A.

In einem Cylinder $ABCD$ (Fig. 37) möge ein dicht schliessender Kolben $EFGH$ beweglich sein. Der Inhalt der Bodenfläche sei f.



Es soll der Kolben ein Luftvolumen v, von der Höhe h, absperren, welches die Spannung p hat.

Durch irgend eine Kraft möge Ersterer derartig herabgedrückt worden sein, dass die untere Fläche aus der Lage HG in die Lage $H_1 G_1$ kam, welcher die Höhe h_1 und das Luftvolumen v_1, von der Spannung p_1, entspricht.

Ferner möge die Annahme gemacht werden, dass bei der Zusammendrückung die Temperatur sich nicht veränderte, also das Mariotte'sche Gesetz

1) $$vp = v_1 p_1$$

Giltigkeit hatte. Diese Annahme ist zulässig, wenn die Volumenveränderung so langsam erfolgt, und die Cylinderwände für die Wärme so durchlässig sind, dass ein Ausgleich der inneren und der äusseren Temperatur stattfindet. (Vergleiche B auf S. 107.)

Man soll nun, unter der genannten Annahme, diejenige Arbeit, L, berechnen, welche nöthig war, um die Verdichtung auszuführen, um also die Luftmenge von dem Volumen v und der Spannung p auf das Volumen v_1 und die Spannung p_1 zu bringen. Es ist mithin herzuleiten, nach welcher Gleichung L von den Grössen v, p und v_1, oder v, p und p_1, abhängt.

Lösung. Um das Arbeitselement dL zu ermitteln, denken wir uns, dass HG in die allgemeine Lage JK (der die Höhe x entspricht) gekommen sei und dann um das unendlich kleine Wegstück dx weiter rücke.

Das unter JK abgesperrte Volumen möge v_x heissen; seine Spannung p_x. Es besteht dann (laut Nr. 1) die Gleichung

$$2)\qquad p_x = \frac{v}{v_x} p.$$

Die Kolbenfläche f wird also mit der Kraft

$$3)\qquad f p_x = \frac{f p v}{v_x}$$

gedrückt. Mithin bedarf es der Arbeit $f p_x dx$, wenn JK um das Wegelement dx weiter herabrücken soll. Daher ist

$$4)\qquad dL = \frac{pv}{x} dx.$$

Hieraus folgt, durch Integration, für die zu berechnende Arbeit der Werth:

$$5)\qquad L = vp\, l \frac{h}{h_1},$$

welcher auch in den Formen

$$6)\qquad L = vp\, l \frac{v}{v_1}$$

und, laut Nr. 1,

$$7)\qquad L = vp\, l \frac{p_1}{p}$$

gegeben werden kann.

Anmerkungen zu A:

I. Die Gleichungen 5—7 lassen sich auf verschiedene Weisen leicht in Worte fassen, was nicht unterbleiben möge. (Dabei ist zu beachten, dass die vorkommenden Logarithmen gemeine Zahlen sind und das Produkt vp eine Arbeit ausdrückt.)

II. Eben so leicht sind jene Gleichungen auf besondere Fälle anwendbar. Man berechne etwa diejenigen Arbeiten, welche nöthig sind, um das anfänglich vorhandene Luftvolumen auf $^2/_3$ seines Betrages zusammenzupressen, oder um die anfängliche Spannung zu verdoppeln.

III. Für das Ausdehnen der Luft gilt Dasselbe, wie für das Zusammendrücken.

IV. Wirkt auf die Rückfläche des Kolbens die atmosphärische Luft, so ist die durch letztere verrichtete Arbeit gehörig zu berücksichtigen.

Sie hat den Werth

$$8) \qquad L_0 = f p_0 (h - h_1),$$

wenn p_0 die Grösse des äusseren Luftdruckes bezeichnet.

V. Man kann die Gleichungen 5—7 auch durch Anwendung der im § 74 des I. Theiles unter Nr. 16 stehenden (für sehr kleine δ giltigen) Näherungsformel

$$9) \qquad \delta = l(1 + \delta)$$

herleiten (ohne Integralrechnung). Hierüber: Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, S. 926 und 927 der 5. Auflage.

B.

Es möge nun vorausgesetzt werden, dass die unter A gemachte Annahme von der Unveränderlichkeit der Temperatur nicht erfüllt sei, die Luft vielmehr in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle (von schlechten Wärmeleitern) die Zusammenpressung erfahre, oder — was auf Dasselbe hinauskommt — dass während der (sehr schnell erfolgenden) Volumenänderung keine merkliche Zuführung oder Abführung von Wärme stattfinde.

Dann besteht, was aus der Physik als bekannt vorausgesetzt werden möge, an Stelle der Gleichung Nr. 1 die Beziehung

$$10) \qquad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^k,$$

in welcher k eine bekannte Constante bedeutet, nämlich (auf zwei Decimalstellen abgerundet) die Zahl 1,41 *).

Man soll nun, wie unter A, (doch jetzt mit Zugrundelegung der Gleichung 10) die Arbeit L berechnen, welche nöthig ist, um die Luftmenge von dem Volumen v und der Spannung p durch Zusammendrücken auf das Volumen v_1 und die Spannung p_1 zu bringen; es soll also L erstens durch v, p, v_1 und k und zweitens durch v, p, p_1 und k ausgedrückt werden.

---

*) Näheres: Clausius, mechanische Wärmetheorie, Bd. 1, S. 65 der 3. Auflage. — Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, S. 1086 der 5. Auflage. — Zeuner, technische Thermodynamik (3. Aufl. der mechanischen Wärmetheorie), Bd. 1, S. 113 und 134.

Lösung. Auf dem unter A genannten Wege findet man für das Arbeitselement den Werth

$$11)\qquad dL = fp\left(\frac{h}{x}\right)^k dx.$$

Er giebt, integrirt,

$$12)\qquad L = \frac{fhp}{k-1}\left\{\left(\frac{h}{h_1}\right)^{k-1} - 1\right\},$$

was Dasselbe ist, wie

$$13)\qquad L = \frac{vp}{k-1}\left\{\left(\frac{v}{v_1}\right)^{k-1} - 1\right\},$$

oder, gemäss Nr. 10, wie

$$14)\qquad L = \frac{vp}{k-1}\left\{\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right\}.$$

Anmerkungen zu B:

I. Man unterlasse nicht, die Gleichungen 13 und 14 so auszunutzen, wie es in Bezug auf Nr. 5—7 durch die dort stehenden Anmerkungen I und II angeregt worden ist. Ferner beachte man, dass III und IV auch hier wieder Giltigkeit haben.

II. Für $k = 1$ geben die Gleichungen Nr. 12—14 zunächst Unbestimmtes (nämlich $0 \cdot \infty$); bei genauerer Untersuchung (gemäss Th. I, Cap. III) aber Nr. 5—7.

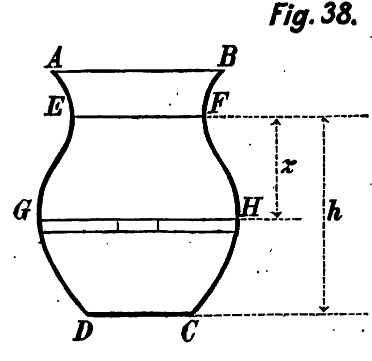
§ 26. Druck tropfbarer Flüssigkeiten.

A.

Allgemeines über derartigen Druck.

Bei Untersuchungen, welche den von tropfbaren Flüssigkeiten ausgeübten Druck betreffen, ist gehörig zu beachten, dass derartige Flüssigkeiten so gut wie gar nicht zusammenpressbar sind, dass ihre Theilchen sich sehr leicht verschieben lassen und dass ein Druck nach allen Richtungen hin sich fortpflanzt.

Fig. 38.



Hat man in irgend einem Gefässe $ABCD$ (Fig. 38) eine tropfbare Flüssigkeit, auf welche

nur die Schwere wirkt, und wird der Druck, welcher in der Tiefe z (unter dem Spiegel EF) für die Flächeneinheit vorliegt, mit p bezeichnet, so ist der in der Tiefe $z + dz$ vorhandene gleich $p + dp$.

Es soll p berechnet werden als Function der „Druckhöhe" z und des Gewichtes γ der Volumeneinheit der Flüssigkeit. Auch soll man das Ergebniss in Worte fassen.

Lösung. Die Druckzunahme dp kann nur herrühren von dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche die Höhe dz hat und über der Flächeneinheit steht. Es ist also

1) $$dp = \gamma\, dz.$$

Daraus folgt, durch Integration,

2) $$p = \gamma z.$$

Das heisst: Der Druck, welchen eine tropfbare Flüssigkeit auf die Flächeneinheit ausübt, ist gleich dem Gewichte derjenigen Flüssigkeitssäule, welche jene Einheit als Basis und die (unveränderliche) Druckhöhe derselben zur Höhe hat. (Er wächst also proportional der Tiefe.)

Hieraus folgt z. B., dass der Druck auf den horizontalen Boden bei jeder Form des Gefässes gleich ist dem Gewichte $fh\gamma$, wenn f den Inhalt des Bodens bezeichnet.

Bei Flächen, welche nicht wagerecht sind, muss dem Umstande Rechnung getragen werden, dass die Druckhöhe veränderlich ist. Es sind also dann Flächenelemente (unendlich kleine Flächen) in Betracht zu ziehen. (Man sehe hierüber das unter B Nachfolgende.)

B.

Wasserdruck auf schiefliegende ebene Gefässwände von allgemeiner Form.

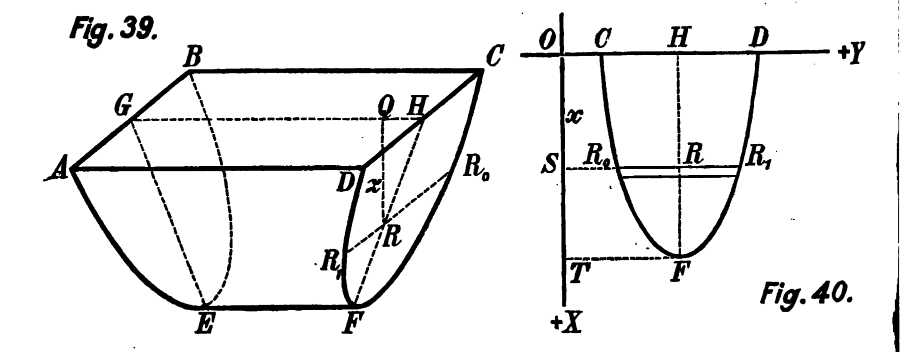
Ein vollständig mit Wasser gefülltes Gefäss möge die durch Fig. 39 angedeutete Gestalt haben. Dabei soll DCF eine ebene Seitenwand von irgend welcher Form sein, geneigt unter dem Winkel α gegen den Flüssigkeitsspiegel $ABCD$. Man denke sich die Begrenzungslinien der Wand auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem von der Art, wie Fig. 40 es darstellt, bezogen

und bezeichne OS mit x, SR_0 mit y_0, SR_1 mit y_1 und OT mit a. Für jenes System mögen y_0 und y_1 gegeben sein durch die Gleichungen

3) $$y_0 = \varphi_0(x)$$

und

4) $$y_1 = \varphi_1(x).$$



Nun berechne man, mit Benutzung des vorher unter A Gefundenen,

I. den von der Wassermasse (die nur der Schwere unterliegt) senkrecht zu der Seitenwand DCF ausgeübten Druck P;

II. seine statischen Momente, $P\xi$ und $P\eta$, in Bezug auf die Achsen OY und OX, also auch die Coordinaten ξ und η des Druckmittelpunktes (nämlich derjenigen Stelle der Wand, welche unterstützt werden muss, wenn dem Drucke P das Gleichgewicht gehalten werden soll).

Man gehe dabei aus von dem Satze, dass der Wasserdruck, welcher senkrecht zu einem in der Tiefe $QR = z$ (Fig. 39) liegenden, nämlich längs $R_0 R_1$ sich erstreckenden Flächenelemente (von der Breite dx) stattfindet, aus der Gleichung Nr. 2 von S. 109 folgt.

Es hat dann keine Schwierigkeiten, P, $P\xi$ und $P\eta$ durch a, α, γ, x, y_0 und y_1 in Form von Integralen auszudrücken, womit der Aufgabe genügt ist.

Endlich wende man die erhaltenen Formeln

III. auf denjenigen besonderen Fall an, in welchem die Seitenwand CDF ein gleichschenkliges Dreieck ist mit der Grundlinie $CD = b$ und der Höhe $HF = a$. Auch möge für diesen Fall ein Zahlenbeispiel, etwa $CD = 1{,}2$ Meter, $HF = 1{,}8$ Meter, $\alpha = 90^0$, durchgeführt werden.

Lösung. I. Es wirkt der in jeder Horizontalschicht vorhandene Druck nach allen Richtungen hin, also auch senkrecht zur Seitenwand; demnach ist (laut Gleichung 2 von S. 109) der auf den unendlich schmalen Flächenstreifen kommende Normaldruck

5) $$dP = \gamma \sin\alpha \,.\, x\,(y_1 - y_0)\,dx.$$

Sämmtliche dP sind parallel gerichtet, dürfen mithin ohne Weiteres addirt werden; man hat daher:

6) $$P = \gamma \sin\alpha \int_0^a x\,(y_1 - y_0)\,dx.$$

Hierbei bedeutet das Integral bekanntlich das statische Moment der Fläche CDF bezüglich der Y-Achse. Wird also der Inhalt der genannten Fläche mit f bezeichnet und die Entfernung, welche ihr Schwerpunkt von der Y-Achse hat, mit u, so geht die Gleichung 6 über in

$$P = \gamma \sin\alpha \,.\, fu,$$

oder, wenn die Druckhöhe des Schwerpunktes h genannt wird, in

7) $$P = fh\gamma.$$

Man hat also den Satz: Der Druck P ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Inhalt f der Seitenwand zur Grundfläche und die Druckhöhe h des Wandschwerpunktes zur Höhe hat.

Es bleibt daher dieser Druck für dieselbe Flüssigkeit unverändert, so lange f und h unverändert sind, welche Lage dabei die Wand — durch Drehung um den Schwerpunkt — auch annehmen möge. Ferner ist P nicht abhängig von der Menge des im Gefässe befindlichen Wassers; also nicht von der Gefässgrösse; nur von f und h.

II. Das Moment von P in Bezug auf die Y-Achse, nämlich $P\xi$, folgt bekanntlich aus der Gleichung

$$P\xi = \int_0^a (dP)\,x\,.$$

Es ist daher

8) $$P\xi = \gamma \sin\alpha \int_0^a x^2 (y_1 - y_0)\,dx.$$

Ebenso hat man für das auf die X-Achse bezogene Moment von P:

9) $$P\eta = \frac{1}{2}\gamma \sin\alpha \int_0^a x (y_1^2 - y_0^2)\,dx.$$

Die Lage des Druckmittelpunktes ist mithin bestimmt durch die Coordinaten:

10) $$\xi = \frac{\int_0^a x^2 (y_1 - y_0)\,dx}{\int_0^a x (y_1 - y_0)\,dx}$$

und

11) $$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a x (y_1^2 - y_0^2)\,dx}{\int_0^a x (y_1 - y_0)\,dx}.$$

Die in den Gleichungen 6 und 8—11 vorkommenden Strecken y_0 und y_1 sind in jedem besonderen Falle bekannte Functionen von x (laut 3 und 4).

Die Lage der Coordinatenachsen hat man der Natur des Sonderfalles immer gut anzupassen.

III. Besitzt die Seitenwand CDF die Form des durch die Aufgabe näher bezeichneten gleichschenkligen Dreiecks, so ist, wenn das Coordinatensystem in der nachstehenden Weise (Fig. 41) liegt,

12) $$y_1 = \frac{b(2a - x)}{2a},$$

13) $$y_0 = \frac{bx}{2a}.$$

Demgemäss liefern die Gleichungen 6, 8 und 9 die Werthe:

14) $P = \frac{1}{6} a^2 b \gamma \sin \alpha$,

15) $P\xi = \frac{1}{12} a^3 b \gamma \sin \alpha$,

16) $P\eta = \frac{1}{12} a^2 b^2 \gamma \sin \alpha$.

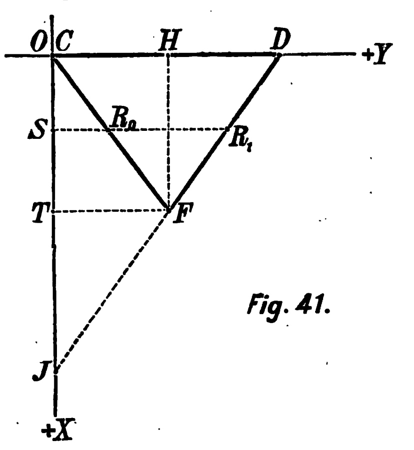


Fig. 41.

Der Druckmittelpunkt hat also die Coordinaten

17) $\xi = \frac{1}{2} a$,

18) $\eta = \frac{1}{2} b$,

deren letztgenannte selbstverständlich ist.

Für das genannte Zahlenbeispiel ergiebt sich:

19) $P = 648$ Kilogramm,

20) $\xi = 90$ Centimeter,

21) $\eta = 60$ Centimeter.

§ 27. Anregungen und Anmerkungen, einfache Integrationen aus den Gebieten der Elektricitätslehre, Volkswirthschaft und Statistik betreffend.

A.

Diejenigen, welche den Kreis der vorausgegangenen Anwendungen der einfachen Integration durch einige Aufgaben aus der Elektricitätslehre zu erweitern wünschen, werden gut thun, das unter I bis III Folgende zu behandeln (und zwar im Sinne der dabei genannten Literatur):

I. Die Vertheilung der Elektricität auf einer kreisförmigen unendlich dünnen Scheibe. (Exner, Vorlesungen über Elektricität, S. 69—71.)

II. Die Capacität einer derartigen Platte und eines geraden Kreiscylinders. (Exner, ebenda, S. 209—210, 214—217).

III. Die Verzweigung des galvanischen Stromes in körperlichen Leitern für den Fall, dass letztere kreis-

förmig und concentrisch sind, aufgestellt in einer Flüssigkeit von bekanntem specifischen Widerstande. Beispiel: Die Kupfer- und Zinkcylinder der Daniell'schen Kette. (Es ergiebt sich, dass der Widerstand der zwischen den beiden Leitern befindlichen Flüssigkeitsschicht nur von dem Verhältniss der Halbmesser abhängt. Näheres: Wiedemann, Lehre von der Elektricität, Bd. 1, S. 368 und 369.) — Ferner für den Fall zweier kreisförmigen Platten, welche in einer Flüssigkeit derartig einander gegenüber gestellt sind, dass die Verbindungsgerade der Mittelpunkte auf beiden senkrecht steht. (Wiedemann, ebenda, S. 369 und 370.)

B.

Interessante der Volkswirthschaftslehre und der Statistik angehörende Verwendungen der Integralrechnung enthalten die im „Literaturverzeichniss" genannten Arbeiten von Launhardt und Zeuner; das Studium derselben möge hiermit empfohlen sein.

Capitel II.

MEHRFACHE INTEGRATIONEN.

§ 28. Einleitung.

A.

Berechnung einiger Integralwerthe.

Von der Theorie der mehrfachen Integration sollen im Nachfolgenden nur die Anfangsgründe als bekannt vorausgesetzt werden. Man sehe, wenn nöthig, Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 95—102 der fünften Auflage, oder die entsprechenden Abschnitte anderer Lehrbücher der Infinitesimalrechnung.

Zunächst möge das Berechnen der Werthe mehrfacher bestimmter Integrale an einigen einfachen Beispielen geübt werden, welche später (bei der Behandlung von Cubaturen, Anziehungen und Trägheitsmomenten) Ausnutzung finden. Es sei die Aufgabe gestellt:

$$\text{I.} \quad J_1 = \int_{x_0=0}^{x_1=a} \int_{y_0=0}^{y_1=b} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\, dy,$$

$$\text{II.} \quad J_2 = \int_{x_0=-a}^{x_1=+a} \int_{y_0=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y_1=+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{(c-x)\, dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{a^2+c^2-2cx}^3},$$

$$\text{III.} \quad J_3 = \int_{x_0=0}^{x_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}} \int_{y_0=0}^{y_1=\frac{x}{\sqrt{3}}} \int_{z_0=0}^{z_1=\frac{h}{a\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-2x)} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

zu berechnen (wobei nur x und y veränderlich sind).

Lösung. Bei I hat man:

$$1)\qquad J_1 = \frac{b}{2}\int\limits_{x_0=0}^{x_1=a}\left(\frac{x^2}{p}+\frac{b^2}{3q}\right)dx,$$

also

$$2)\qquad J_1 = \frac{1}{6}ab\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

Bei II giebt die Ausführung der ersten Integration:

$$3)\qquad J_2 = \pi\int\limits_{x_0=-a}^{x_1=+a}\frac{(c-x)\,dx}{\sqrt{a^2+c^2-2cx}^3},$$

womit die Sache auf § 1, IV, zurückkommt.

Endlich liefert III die Integrale

$$4)\qquad J_3 = \frac{h}{a\sqrt{3}}\int\limits_{x_0=0}^{x_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}}\int\limits_{y_0=0}^{y_1=\frac{x}{\sqrt{3}}}(x^2+y^2)(a\sqrt{3}-2x)\,dx\,dy$$

und

$$5)\qquad J_3 = \frac{10h}{27a}\int\limits_{x_0=0}^{x_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}}(a\sqrt{3}-2x)\,x^3\,dx,$$

mithin den Werth

$$6)\qquad J_3 = \frac{1}{8}\sqrt{3}\,a^4 h.$$

B.

Vier Flächenelemente.

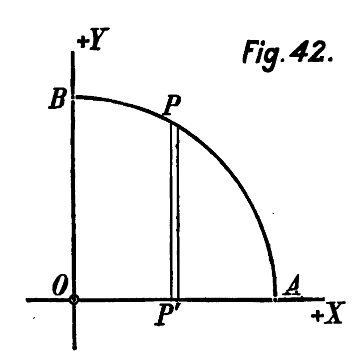
Als Vorbereitung auf die folgenden Paragraphen soll nun die Doppelintegration für eine sehr bekannte Flächeninhaltsberechnung Anwendung finden und zwar so, dass gleichzeitig der Zusammenhang zwischen den betreffenden einfachen und zweifachen Integralen hervortritt.

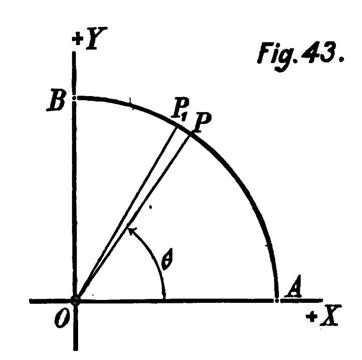
Es sei die Aufgabe folgende: Der Inhalt S des mit dem Halbmesser $OA = a$ beschriebenen Viertelkreises AOB (Fig. 42—45) soll ausgedrückt werden

I. durch ein **einfaches** Integral, indem man ihn zusammensetzt

α) aus unendlich vielen (unendlich schmalen) trapezförmigen **Streifen**, welche der Y-Achse gleichgerichtet liegen (Fig. 42),

β) aus unendlich vielen **Sectoren** (Fig 43);

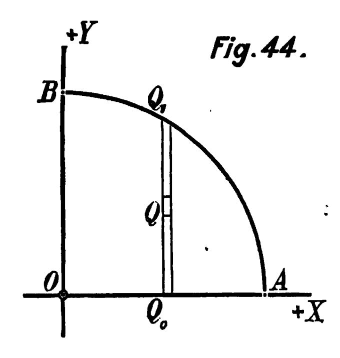


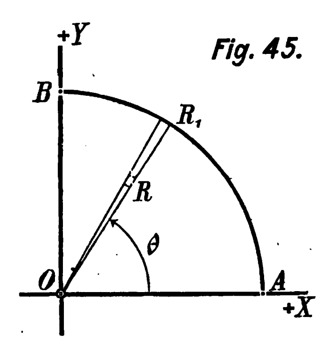


II. durch ein **Doppelintegral**

α) bei Benutzung von **rechtwinkligen** Coordinaten ($OQ_0 = x$, $Q_0 Q = y$; Fig. 44),

β) unter Anwendung von **Polarcoordinaten** ($OR = r$, $\angle AOR = \theta$, Fig. 45).





Lösung. I. Benutzt man als Flächenelement (dS) einen **Streifen**, dessen Länge $P'P = y$ (Fig. 42) und dessen Breite das Differential von $OP' = x$, so ist

7) $$dS = \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

also

8) $$S=\int_{x_0=0}^{x_1=a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Wird hingegen (Fig. 43) die Fläche aus unendlich vielen Sectoren zusammengesetzt und dabei der Winkel AOP mit θ bezeichnet, so hat man:

9) $$dS=\frac{1}{2}a^2\,d\theta$$

und

10) $$S=\int_{\theta_0=0}^{\theta_1=\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}a^2\,d\theta.$$

Bei den durch Nr. 8 und 10 ausgedrückten Quadraturen hat das Flächenelement nur eine unendlich kleine Dimension (bei den unter II folgenden besitzt es deren zwei).

II. Denkt man sich den allgemeinen Punkt Q der Fläche (Fig. 44) bestimmt durch die rechtwinkligen Coordinaten $OQ_0=x$, $Q_0Q=y$ und lässt jede derselben um ihr Differential wachsen, so ergiebt sich

11) $$dS=dx\,dy,$$

mithin

12) $$S=\int_{x_0=0}^{x_1=a}\int_{y_0=0}^{y_1=\sqrt{a^2-x^2}}dx\,dy.$$

Kommen hingegen Polarcoordinaten zur Verwendung wird also der allgemeine Flächenpunkt R (Fig. 45) bestimmt durch den Leitstrahl $OR=r$ und die Anomalie $AOR=\theta$, so gilt für den Inhalt des Flächenelementes (welches dann die Form eines Kreisringsectors hat) die Gleichung:

13) $$dS=r\,d\theta\,dr=r\,dr\,d\theta.$$

Mithin hat man:

14) $$S=\int_{\theta_0=0}^{\theta_1=\frac{\pi}{2}}\int_{r_0=0}^{r_1=a}r\,d\theta\,dr,$$

oder

15) $$S=\int_{r_0=0}^{r_1=a}\int_{\theta_0=0}^{\theta_1=\frac{\pi}{2}}r\,dr\,d\theta.$$

Bei Nr. 14 ist durch die erste Integration ein unendlich schmaler Sector gebildet und es sind dann, durch die zweite Integration, alle derartigen Sectoren addirt.

Bei Nr. 15 hingegen liefert die erste Integration einen unendlich schmalen Viertelkreisring und es werden bei der zweiten alle derartigen Ringflächen summirt.

Berechnet man die unter Nr. 8, 10, 12, 14 und 15 stehenden Integralwerthe — was der Anfänger nicht unterlassen möge — so ergiebt sich selbstverständlich in jedem der fünf Fälle:

16) $$S = \frac{1}{4}\pi a^2.$$

C.

Neun Volumenelemente.

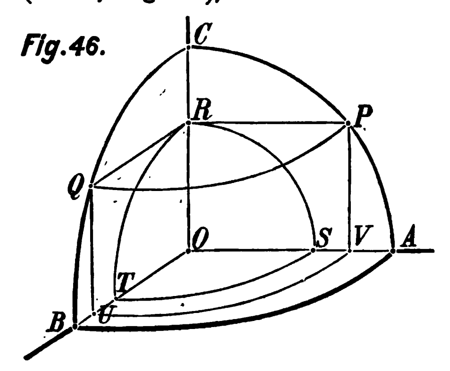
Um ferner das später Folgende bezüglich der dreifachen Integration vorzubereiten, wie auch um der letzteren Beziehung zur doppelten und zur einfachen Integration einzuüben, möge folgende Aufgabe gelöst werden:

Ein Kugeloctant $OABC$ (Fig. 46, 47 und 48) ist mit dem Halbmesser a aus dem Punkte O beschrieben. Es soll das Volumen V jenes Octanten ausgedrückt werden

I. durch ein einfaches Integral, indem man V zusammensetzt

α) aus unendlich dünnen, zu OAB parallel liegenden Schichten (Kreisscheiben-Quadranten), deren eine in der Fig. 46 durch PQR angedeutet ist,

β) aus unendlich dünnen Hohlkugel-Octanten (RST, Fig. 46),



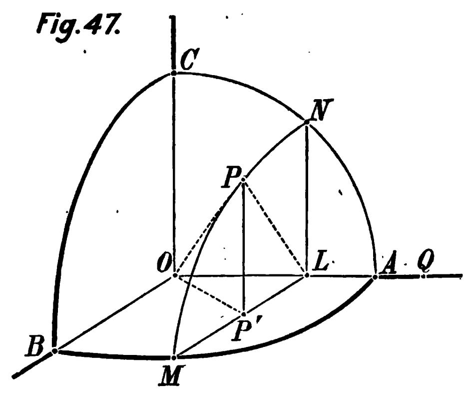
γ) aus derartigen Hohlcylinder-Quadranten $(PQUV)$*);

sodann

II. durch ein Doppelintegral, indem man V aus stabförmigen Elementen, welche die (veränderliche) Höhe $P'P = z$ (Fig. 47) haben, zusammenfügt und dabei den Punkt P' sich entweder bestimmt denkt

α) durch die rechtwinkligen Coordinaten $OL = x$, $LP' = y$, oder

β) durch die Polarcoordinaten $\angle AOP' = \theta$ und $OP' = r$;



ferner:

γ) durch ein Doppelintegral, indem man V aus Kugelpyramiden zusammensetzt, hierbei P (Fig. 47) sich bestimmt denkend durch $\angle P'LP = \omega$ und $\angle LOP = \varphi$; endlich

III. durch ein dreifaches Integral, wobei der allgemeine Punkt P (Fig. 48) des Octantenvolumens bestimmt gedacht sein soll

α) mittelst der rechtwinkligen Coordinaten $OL = x$, $LP_0 = y$, $P_0P = z$, oder

β) mittelst der cylindrischen $\angle AOP_0 = \theta$, $OP_0 = r$, $P_0P = z$, oder

*) Die Formeln, welche für den Flächeninhalt des Kreises, die Oberfläche der Kugel und den Mantelflächeninhalt des Cylinders gelten, sollen bei I (α, β, γ) als bekannt vorausgesetzt werden.

γ) durch die räumlichen Polarcoordinaten

$$\angle P_0 L P = \omega, \ \angle L O P = \varphi, \ O P = \varrho.$$

Bei der unter III$^{\alpha}$ genannten Ableitung von V sollen die Volumenelemente in der Reihenfolge z, y, x integrirt werden, bei III$^{\beta}$ in der Folge z, θ, r, endlich bei III$^{\gamma}$ in der Reihenfolge ϱ, ω, φ.

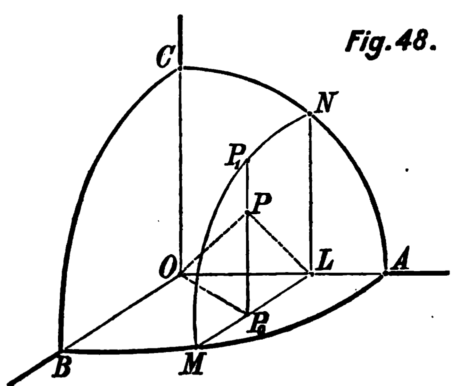


Fig. 48.

Lösung. I. α) Es sei, in der Fig. 46, $OR = z$; dann ist das Volumen einer unendlich dünnen Schicht:

$$17) \qquad dV = \frac{1}{4}\pi(a^2 - z^2)\,dz,$$

also

$$18) \qquad V = \int_{z_0=0}^{z_1=a} \frac{1}{4}\pi(a^2 - z^2)\,dz.$$

β) Für das Volumen des unendlich dünnen Hohlkugel-Octanten hat man:

$$19) \qquad dV = \frac{1}{2}\pi z^2 . dz;$$

daher

$$20) \qquad V = \int_{z_0=0}^{z_1=a} \frac{1}{2}\pi z^2\,dz.$$

γ) Der Hohlcylinder-Quadrant besitzt den Inhalt

$$21) \qquad dV = \left[\left(\frac{1}{2}\pi x\right)dx\right]z,$$

wobei $x = OV$ und

22) $$z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist, so dass sich ergiebt:

23) $$V = \frac{1}{2}\pi \int_{x_0=0}^{x_1=a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Von den drei Integralen Nr. 18, 20 und 23 ist offenbar Nr. 20 das günstigste. Es rührt dies daher, dass die für dasselbe gewählte Elementeform sich der Art des betreffenden Körpers am besten anschliesst.

II. α) Hier ist (weil rechtwinklige Coordinaten vorliegen) das stabförmige Volumenelement

24) $$dV = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

also:

25) $$V = \int_{x_0=0}^{x_1=a} \int_{y_0=0}^{y_1=\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

β) Sind hingegen für P (Fig. 47) die cylindrischen Coordinaten $\angle AOP' = \theta$, $OP' = r$, $P'P = z$ gegeben, so hat das stabförmige Volumenelement den Werth

26) $$dV = (r\, d\theta\, dr)\, z = \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta;$$

daher ist

27) $$V = \int_{r_0=0}^{r_1=a} \int_{\theta_0=0}^{\theta_1=\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta,$$

oder auch

28) $$V = \int_{\theta_0=0}^{\theta_1=\frac{\pi}{2}} \int_{r_0=0}^{r_1=a} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, d\theta\, dr.$$

γ) Wurde P (Fig. 47) durch ω und φ bestimmt, so hat man Folgendes: Das Volumen einer der unendlich kleinen Kugelpyramiden ist:

29) $$dV = \frac{1}{3} a^3 \sin\varphi\, d\omega\, d\varphi.$$

Demgemäss:

30) $$V = \frac{1}{3} a^3 \int_{\varphi_0=0}^{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} \int_{\omega_0=0}^{\omega_1=\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi\, d\omega.$$

III. α) Das Volumenelement hat, wenn P (Fig. 48) durch x, y und z bestimmt ist, die Form eines geraden rechtwinkligen Parallelepipeds (Quaderform); daher den Inhalt

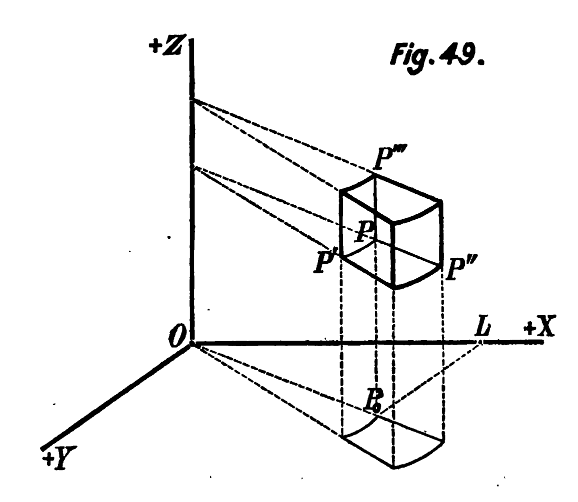
31) $$dV = dx\,dy\,dz.$$

Also ist

32) $$V = \int_{x_0=0}^{x_1=a} \int_{y_0=0}^{y_1=\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z_0=0}^{z_1=\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx\,dy\,dz.$$

β) Das Volumenelement zeigt in diesem Falle die Gestalt eines Wölbsteines aus einem Tonnengewölbe (was die Fig. 49 darstellt). Die Dimensionen des Elementes sind:

$$PP' = r\,d\theta,\quad PP'' = dr,\quad PP''' = dz;$$



daher ist

33) $$dV = (r\,d\theta)\,dr\,dz;$$

mithin

34) $$V = \int_{r_0=0}^{r_1=a} \int_{\theta_0=0}^{\theta_1=\frac{\pi}{2}} \int_{z_0=0}^{z_1=\sqrt{a^2-r^2}} r\,dr\,d\theta\,dz.$$

γ) Hier hat (zufolge der sphärischen Coordinaten) das Volumenelement die Form eines Wölbsteines aus einem Kugelgewölbe (durch die Fig. 50 dargestellt).

Die Dimensionen sind, was der Anschauung entnommen werden kann,

$$PP' = \varrho\, d\varphi,\quad PP'' = (\varrho \sin\varphi)\, d\omega,\quad PP''' = d\varrho.$$

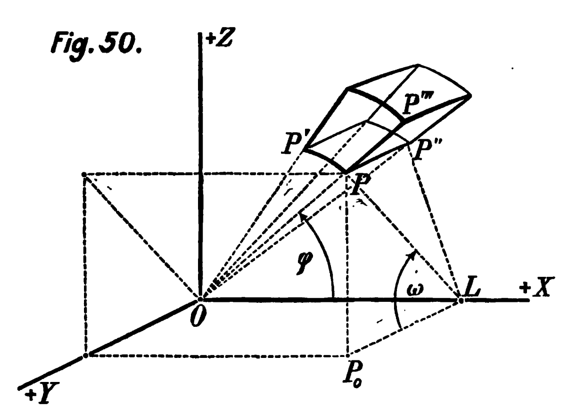
Also ist der Inhalt des Elementes:

35) $$dV = \varrho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\omega\, d\varrho.$$

Daher:

36) $$V = \int_{\varphi_0=0}^{\varphi_1=\frac{\pi}{2}} \int_{\omega_0=0}^{\omega_1=\frac{\pi}{2}} \int_{\varrho_0=0}^{\varrho_1=a} \varrho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\omega\, d\varrho.$$

Fig. 50.



Anmerkung. Führt man die Integrale Nr. 18, 20, 23, 25, 27, 28, 30, 32, 34 und 36 durch (was, der Uebung wegen, empfohlen sein möge), so giebt, selbstverständlich, jedes derselben den Werth

37) $$V = \frac{1}{6} \pi a^3.$$

Auch zeigt sich dabei, wie die unter III stehenden Integrale (Nr. 32, 34 und 36) auf die vorhergehenden zurückkommen.

D.

Ermittelung von Integralwerthen durch geometrische Deutung.

Zur weiteren Einübung derjenigen Beziehungen, welche zwischen den mehrfachen Integrationen und den Volumenermittelungen bestehen, möge folgende Aufgabe gelöst werden:

Es sollen die Werthe der Integrale

38) $$J_1 = c\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{x(2a-x)}} dx\,dy,$$

39) $$J_2 = c\int_0^{a}\int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) dx\,dy,$$

40) $$J_3 = \int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{c} dx\,dy\,dz,$$

41) $$J_4 = \int_0^{\frac{1}{2}c}\int_0^{x}\int_0^{c-2x} dx\,dy\,dz$$

durch geometrische Deutung Herleitung finden, indem man (x, y und z als rechtwinklige Coordinaten ansehend) jene Werthe als diejenigen von Körperinhalten auffasst, nämlich J_1 und J_2 in der Form

42) $$V_1 = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} z\,dx\,dy, \quad z = f(x, y),$$

J_3 und J_4 in der Form

43) $$V_2 = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dx\,dy\,dz.$$

Lösung. Durch Vergleichung von Nr. 38 und Nr. 42 ergiebt sich leicht, dass das Integral J_1 den Inhalt eines geraden Kreiscylinders darstellt, welcher die Höhe c hat und über einem mit dem Radius a beschriebenen Halbkreise steht. Es ist mithin

44) $$J_1 = \frac{1}{2}\pi a^2 c.$$

Ferner folgt, auf demselben Wege, dass J_2 den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide bedeutet, deren Begrenzungsflächen die drei Coordinatenebenen und eine auf den Achsen die Strecken a, b und c abschneidende Ebene sind. Man hat deshalb:

45) $$J_2 = \frac{1}{6}\,a\,b\,c.$$

Sodann lässt Vergleichung von Nr. 40 und Nr. 43 erkennen, dass J_3 einen Viertelcylinder darstellt, welcher den Grundflächenhalbmesser a und die Höhe c hat. Das giebt:

46) $$J_3 = \frac{1}{4} \pi a^2 c.$$

Endlich hat man, Nr. 41 mit Nr. 43 vergleichend, zu beachten, dass hier
$$z_1 = c - 2x = c\left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}c}\right)$$
ist und dass die Gleichung der Ebene, nämlich
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$
für $b = \infty$ in
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$
also in
$$z = c\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$
übergeht. Es führt dies zu der Erkenntniss, dass J_4 den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide bedeutet, deren eine Seitenfläche der YZ-Ebene parallel liegt und dass

47) $$J_4 = \frac{1}{24} c^3$$
ist.

Anmerkung. Man unterlasse nicht, diejenigen Figuren zu zeichnen, welche das in Bezug auf J_1 bis J_4 Gesagte darstellen.

Auch leite man, zur Uebung, die Werthe Nr. 44—47, welche der Anschauung entnommen worden sind, auf dem Wege der Rechnung aus den Gleichungen 38—41 her (wie es unter A, auf Seite 115 und 116, bezüglich der dort behandelten Integrale J_1 — J_8 geschehen ist).

E.
Zwei Cubaturen.

Den Schluss der „Einleitung" möge die Lösung folgender Aufgaben bilden:

I. Der vierte Theil, $OABC$, Fig. 51, eines geraden Kreiscylinders wird durch die Seitenfläche $A_1 B_1 C_1$ einer Pyramide geschnitten, deren Kanten OA_1, OB_1 und OC_1 gleich lang sind. Die Kante $A_1 B_1$ berührt den Quadranten AB in seinem Halbirungspunkte H. Der Grundflächenhalbmesser des Cylinders hat die Länge a.

Man soll den Inhalt V_1 des Körpers $OAHBC_1DHE$ durch Doppelintegration berechnen und zwar (als Vielfaches von a^3 und bis auf zwei Decimalstellen genau)

α) unter Benutzung rechtwinkliger Coordinaten,

β) mit Verwendung von Cylindercoordinaten (also von Polarcoordinaten im Grundriss).

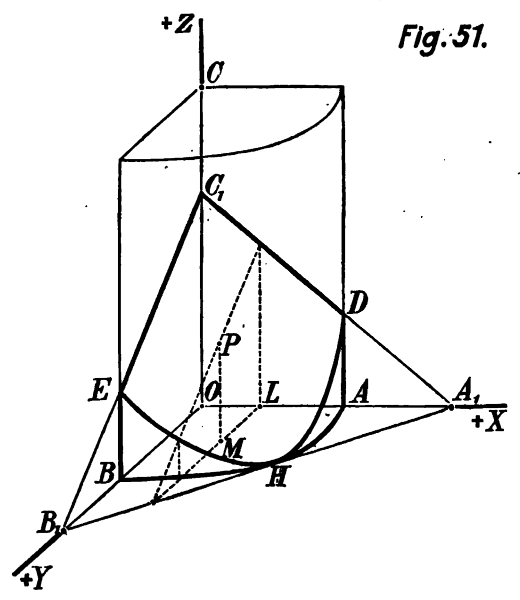


Fig. 51.

II. Das Volumen V_2 desjenigen dreiachsigen Ellipsoids, welches die Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ hat (Fig. 52),

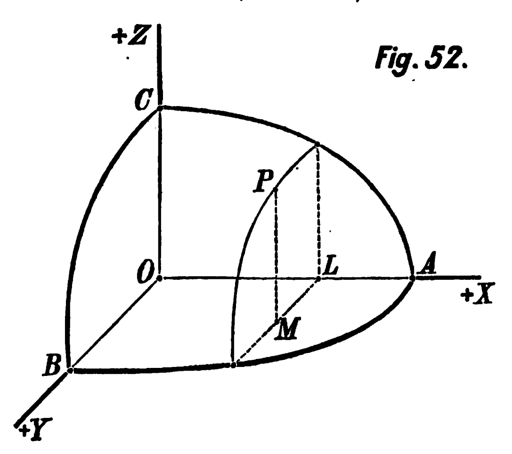


Fig. 52.

soll, unter Verwendung rechtwinkliger Coordinaten, durch ein Doppelintegral ausgedrückt werden.

Hierauf soll man, durch geeignete Substitutionen, die elliptischen Grenzen in constante verwandeln und dann den Werth des Integrals berechnen.

Lösung. I. Man hat zunächst, bezogen auf Fig. 51 und bei Anwendung von rechtwinkligen Coordinaten,

48) $$dV_1 = z\,dx\,dy,$$

wobei $x = OL$, $y = LM$, $z = MP$ ist. Wird nun der Werth von z als $f(x, y)$ der Gleichung der Ebene $A_1 B_1 C_1$ entnommen und in Nr. 48 eingesetzt, so ergiebt sich:

49) $$dV_1 = (a\sqrt{2} - x - y)\,dx\,dy;$$

mithin ist

50) $$V_1 = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (a\sqrt{2} - x - y)\,dx\,dy.$$

Die Durchführung der Integrationen liefert:

51) $$V_1 = \frac{3\pi\sqrt{2} - 8}{12}\,a^3,$$

das ist, auf zwei Decimalstellen abgerundet,

52) $$V_1 = 0{,}44\,a^3.$$

Werden cylindrische Coordinaten benutzt, wird also P (Fig. 51) bestimmt gedacht durch $OM = r$, $\angle AOM = \theta$, $MP = z$, so tritt an die Stelle von Nr. 49:

53) $$dV_1 = (a\sqrt{2} - r\,[\cos\theta + \sin\theta])\,r\,dr\,d\theta$$

und es ist dann

54) $$V_1 = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sqrt{2} - r\,[\cos\theta + \sin\theta])\,r\,dr\,d\theta.$$

Selbstverständlich kommt man auch hiermit auf 51.

Anmerkung zu I. Das Integral Nr. 54 ergiebt sich auch, wenn man in 50 zwei neue Veränderliche mittelst der Substitutionen

55) $$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

einführt, welche bekanntlich zu benutzen sind, wenn die Umwandelung von (veränderlichen) Kreisgrenzen in constante Grenzen erfolgen soll.

II. Für das gesuchte Volumen hat man zunächst

56) $$V_2 = 8c \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

Die hier vorliegenden elliptischen Grenzen werden bekanntlich*) in constante verwandelt durch die Substitutionen

57) $$x = a\varrho\cos\theta,\ y = b\varrho\sin\theta.$$

Sie liefern:

58) $$V_2 = 8c \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varrho^2}\, ab\varrho\, d\varrho\, d\theta.$$

Das giebt, wenn die Doppelintegration ausgeführt wird,

59) $$V_2 = \frac{4}{3}\pi abc$$

(was z. B. im § 29, unter C, zur Anwendung gelangt).

Anmerkung zu II. Als Zahlenbeispiel kann die Berechnung des Volumens der Erde dienen, indem letztere als Umdrehungsellipsoid und zwar mit den, in Kilometern ausgedrückten, Halbachsen

60) $$a = 6377,\ c = 6356^{**})$$

aufgefasst wird. Man führe dieses Zahlenbeispiel durch, V_2 in Cubikmeilen ausdrückend (die geographische Meile zu 7,420 Kilometer).

Auch zeige man, wie sich die Gleichung 59 durch einfache Integration erhalten lässt, wenn der den Flächeninhalt der Ellipse betreffende Satz als bekannt vorausgesetzt werden darf.

§ 29. Mittelwerthe einer Function von zwei Veränderlichen.***)

A.

Allgemeines über derartige Mittelwerthe.

Eine Variabele, die wir z nennen wollen, möge von zwei anderen, die x und y heissen sollen, abhängen nach einer Gleichung von der Form

1) $$z = f(x, y);$$

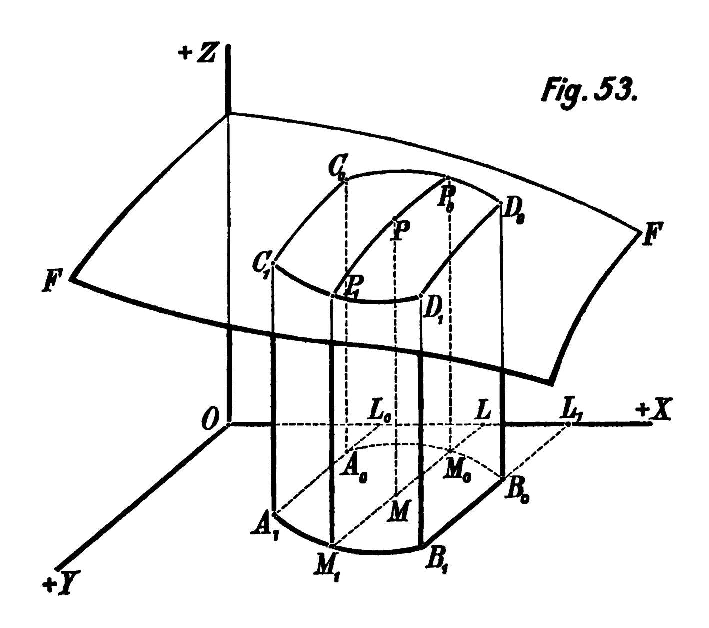
*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, § 97, II, der 5. Auflage.

**) Helmert, Theorien der höheren Geodäsie; Band 1, S. 38. — Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 2, S. 33 der 2. Auflage.

***) Man vergleiche § 7—11.

z. B. ein Gasvolumen von einem Drucke und einer Temperatur nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze. (Theil I, § 43.)

Man kann dann die Gleichung Nr. 1 als diejenige einer Fläche auffassen, indem man die Veränderlichen x, y und z als rechtwinklige Coordinaten ansieht. Es möge jene Fläche in der Figur 53 durch FF veranschaulicht sein (wobei x durch OL, y durch LM, z durch MP dargestellt und FF durchsichtig gedacht wurde).



Wenn dann den beiden unabhängigen Veränderlichen x und y ein bestimmter Spielraum vorgeschrieben ist — etwa der in der Figur mit $A_0 B_0 B_1 A_1$ bezeichnete — so darf man sich denselben (durch Parallelen zu den Coordinatenachsen) schachbretartig in n kleine Rechtecke von den Seitenlängen Δx und Δy zerlegt denken. Man kann sich ferner vorstellen, dass für sämmtliche Ecken jener Rechtecke die zugehörigen z construirt worden seien und man für ein unendlich grosses n deren arithmetisches Mittel μ abgeleitet habe. Letzteres heisst dann (entsprechend § 7, A) der „Mittelwerth" von z in Bezug auf den genannten Spielraum.

Es soll nun dieser Werth μ durch ein bestimmtes Doppelintegral ausgedrückt werden, indem man sich den Spielraum gegeben denkt durch die Gleichungen

2) $$y_0 = \varphi_0(x),$$

3) $$y_1 = \varphi_1(x)$$

der Linien $A_0 B_0$, bezüglich $A_1 B_1$, und durch die Abscissen

$$O L_0 = x_0,\ O L_1 = x_1.$$

Der Inhalt der Fläche $A_0 B_0 B_1 A_1$ möge hierbei S heissen.

Anmerkung. Dass bezüglich der Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit der betreffenden Functionen hier und im Folgenden naheliegende Voraussetzungen gemacht sind, (vergleiche § 7, A) braucht nicht besonders ausgesprochen zu werden, weil es, unter gehöriger Berücksichtigung der Figuren, für selbstverständlich gelten darf.

Lösung. Für S gilt die Gleichung

4) $$S = n \,.\, \Delta x \Delta y.$$

Lässt man n ins Unendliche wachsen, womit $\Delta x \Delta y$ in $dx\,dy$ übergeht, so ist das arithmetische Mittel μ der sämmtlichen z-Werthe, welche zu den unendlich vielen Flächenelementen (von dem Inhalte $dx\,dy$) gehören, ausgedrückt durch

5) $$\mu = \operatorname{Lim} \frac{\Sigma f(x, y)}{n},$$

oder, wegen Nr. 4, durch

6) $$\mu = \operatorname{Lim} \frac{\Sigma f(x, y) \,.\, \Delta x \Delta y}{S},$$

wobei $\Sigma f(x, y) \Delta x \Delta y$ so viel bedeutet, wie „Summe aller Grössen von der Form $f(x, y) \Delta x \Delta y$" und diese Summe innerhalb des bezeichneten Spielraumes gemeint ist. Es steht also im Zähler eine zwischen den Grenzen y_0 und y_1, x_0 und x_1 zu nehmende Doppelsumme von unendlich vielen unendlich kleinen Grössen, welche die allgemeine Form $f(x, y)\,dx\,dy$ haben. Aus Nr. 6 folgt daher, gemäss der Definition*) des bestimmten Doppelintegrals:

7) $$\mu = \frac{1}{S} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dx\,dy$$

als der gesuchte Mittelwerth.

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, § 95 der 5. Aufl.

Geometrisch aufgefasst lautet das: Der durch die Gleichung Nr. 7 bestimmte Mittelwerth μ einer Function zweier Veränderlichen ist gleich der Höhe eines Cylinders, welcher den Spielraum $A_0 B_0 B_1 A_1$ zur Grundfläche und mit dem über letzterem stehenden Körper $A_0 B_0 B_1 A_1 C_0 D_0 D_1 C_1$ (Fig. 53) gleiches Volumen hat.

Es kommt also die Berechnung eines derartigen Mittelwerthes zurück auf eine Cubatur; ferner, da auch S bestimmt werden muss (weil es, im Allgemeinen, unbekannt ist) auf eine Quadratur, nämlich auf eine Anwendung der Gleichung

$$8)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dx\,dy = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\,dx.$$

B.

Mittelwerth eines Gasvolumens.

Als erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes Nr. 7 möge die Lösung folgender Aufgabe dienen:

Es soll unter Zugrundelegung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes (Th. I, § 43) der durch die Gleichung Nr. 7 definirte Mittelwerth μ eines Gasvolumens berechnet werden für den Fall, dass die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke zwischen den Werthen a_1 und a_2 liegen (wobei $0 < a_1 < a_2$ vorausgesetzt ist), die Temperaturen zwischen 0 und dem positiven Werthe b.

Lösung. Man hat, gemäss der Gleichung 7, und wenn die im § 43 des I. Theiles benutzten Bezeichnungen wieder Verwendung finden:

$$9)\qquad \mu = \frac{c}{(a_2 - a_1)\,b}\int_{a_1}^{a_2}\int_0^b \frac{1 + k\,y}{x}\,dx\,dy,$$

woraus mit Leichtigkeit folgt:

$$10)\qquad \mu = \frac{(2 + b\,k)\,c}{2\,(a_2 - a_1)}\,l\,\frac{a_2}{a_1}\,.$$

C.

Mittlere Abstände der Erdoberfläche von der Ebene des Aequators und eines Meridians.

Ein zweites Beispiel für die Anwendung der Gleichung 7 auf Seite 131 sei folgendes:

Man soll berechnen, wieviel für alle Oberflächenpunkte einer Hälfte der ellipsoidischen Erde der durch Nr. 7 definirte „mittlere Abstand“ von der halbirenden Ebene beträgt

I. für den Fall, dass diese Ebene die des Aequators,

II. für den, dass sie die eines Meridians ist.

Lösung. Im ersten der beiden Fälle ergiebt sich (unter Benutzung der Gleichung 59 des § 28)

$$11) \qquad \mu = \frac{2}{3} c;$$

im zweiten

$$12) \qquad \mu = \frac{2}{3} a.$$

Dabei bezeichnet a die grosse, c die kleine Halbachse des Erdellipsoids; es haben also a und c die im § 28 unter Nr. 60 genannten Werthe.

D.

Anregungen und Anmerkungen.

I. Die Gleichung 7 kann auch zur Ableitung von Mittelwerthen, welche zu den geometrischen Wahrscheinlichkeiten in naher Beziehung stehen, Anwendung finden. So z. B. zur Berechnung der mittleren Entfernung μ zweier in einer (geradlinigen) Strecke $AB = a$ beliebig angenommenen Punkte P und Q, die man sich um x, bezüglich y, von A abstehend denkt.*) Es ergiebt sich für jene mittlere Entfernung der Werth

$$13) \qquad \mu = \frac{1}{3} a.$$

II. In Bezug auf die Mehrdeutigkeit von Mittelwerthen möge § 7, B, gehörige Beachtung finden.

III. Ueber die Berechnung mittlerer Meerestiefen sehe man: Günther, Geophysik, Bd. II, S. 339.

§ 30. Massen und Gewichte ungleichförmig dichter Körper.**)

A.

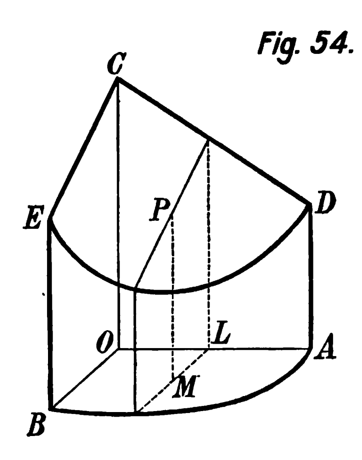
Ein gerader cylindrischer Körper $OABCDE$ (Fig. 54) hat einen Viertelkreis OAB als Basis, welcher mit dem

*) Czuber, geometrische Wahrscheinlichkeiten, S. 193, Nr. 154.

**) Vergl. § 17.

Halbmesser k beschrieben ist. Der Körper wird oben durch eine Ebene CDE begrenzt. Seine drei senkrecht stehenden Kanten AD, BE und OC haben, der Reihe nach, die Längen a, b und c.

Die Dichtigkeit des Körpers ist proportional dem Quadrate des Abstandes von der Kante OC, ändert sich also nach Schalen. Im Abstande 1 von OC wiegt die Volumeneinheit n Kilogramm.



Man soll (unter Benutzung stabförmiger Elemente)

I. das Gewicht G des Körpers berechnen;

II. das mittlere Gewicht γ_m der Volumeneinheit (nach der Gleichung

$$1)\qquad \gamma_m = \frac{G}{V},$$

in welcher V das Volumen bedeutet); endlich sollen

III. die unter I und II gewonnenen Ergebnisse auf den besonderen Fall

$$a = b = c$$

angewendet werden.

Lösung. I. Benutzt man ein Coordinatensystem, für welches die Richtungen OA, OB und OC diejenigen der positiven x, y und z sind, so ergiebt sich:

$$2)\qquad G = cn \int_0^k \int_0^{\sqrt{k^2 - x^2}} (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{x}{u} - \frac{y}{v}\right) dx\, dy.$$

Dabei ist $x = OL$, $y = LM$, $z = MP$; ferner bezeichnet u die Strecke, welche die Ebene CDE auf der X-Achse, v diejenige, welche sie auf der Y-Achse abschneidet. Man hat also

3) $$u = \frac{ck}{c - a},$$

4) $$v = \frac{ck}{c - b}.$$

Werden neue Veränderliche eingeführt mittelst der Gleichungen

5) $$x = r \cos \theta,$$

6) $$y = r \sin \theta,$$

benutzt man also cylindrische Coordinaten an Stelle der rechtwinkligen (vergl. § 28, E, I), so geht Nr. 2 über in:

7) $$G = cn \int_0^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \left(1 - \frac{r \cos \theta}{u} - \frac{r \sin \theta}{v}\right) r\, d r\, d \theta.$$

Die Durchführung der Integrationen giebt

8) $$G = \frac{1}{40} \left\{ 5 \pi c + 8 (a + b - 2 c) \right\} k^4 n$$

und zwar in Kilogrammen, wenn a, b, c und k in derjenigen Einheit ausgedrückt werden, auf welche n sich bezieht.

II. Für V hat man, bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten,

9) $$V = c \int_0^k \int_0^{\sqrt{k^2 - x^2}} \left(1 - \frac{x}{u} - \frac{y}{v}\right) d x\, d y;$$

oder, wenn Nr. 5 und 6 benutzt werden,

10) $$V = c \int_0^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{r \cos \theta}{u} - \frac{r \sin \theta}{v}\right) r\, d r\, d \theta.$$

Das giebt:

11) $$V = \frac{1}{12} \left\{ 3 \pi c + 4 (a + b - 2 c) \right\} k^2.$$

Folglich hat das mittlere Gewicht der Volumeneinheit den Werth

12) $$\gamma_m = \frac{3}{10} \cdot \frac{5 \pi c + 8 (a + b - 2 c)}{3 \pi c + 4 (a + b - 2 c)} k^2 n.^{*})$$

---

*) Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Th. I, S. 5 der 2. Auflage.

III. Für den in der Aufgabe genannten besonderen Fall erhält man:

13) $$G = \frac{1}{8} \pi c k^4 n$$

und

14) $$\gamma_m = \frac{1}{2} k^2 n;$$

also die Hälfte desjenigen Gewichtes der Volumeneinheit, welches den im Mantel des cylindrischen Körpers befindlichen Stellen zukommt.

B.

Die Pyramide $OABC$ (Fig. 55) hat die Kantenlängen

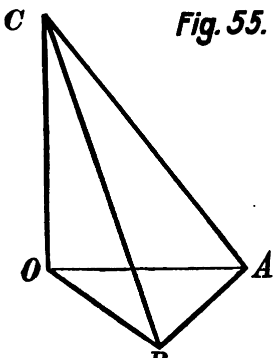


Fig. 55.

$$OA = AB = \frac{1}{2} c, \; OC = c.$$

Ihre Grundfläche OAB ist ein bei A rechtwinkliges Dreieck. OC steht senkrecht zur Basis. Die Dichtigkeit ε des Körpers ist proportional dem Quadrate des Abstandes von der Ecke O und für die Einheit desselben gleich k. Es soll die Masse M berechnet werden.

Lösung. Wir benutzen rechtwinklige Coordinaten, nehmen OA als die Richtung der positiven x, OC als die der positiven z und haben dann

15) $$M = \int_0^{\frac{1}{2}c} \int_0^{x} \int_0^{c-2x} k (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Durchführung der drei Integrationen liefert

16) $$M = \frac{1}{120} c^5 k.$$

C.

Die Masse M eines geraden Kreiscylinders, dessen Dichtigkeit ε proportional ist dem Quadrate des Abstandes vom Grundflächenmittelpunkte, sei zu berechnen. Es möge der Körper die Höhe c und den Basisradius a haben. In der Entfernung 1 vom Grundflächencentrum soll ε gleich k sein.

Lösung. Unter Verwendung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Z-Achse mit der Cylinderachse und dessen XY-Ebene mit der Körperbasis zusammenfällt, hat man:

$$17)\quad M = 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Dies geht, wenn neue Veränderliche mittelst der Gleichungen Nr. 5 und 6 eingeführt, also cylindrische Coordinaten benutzt werden, über in

$$18)\quad M = 4k \int_0^a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^c (r^2 + z^2)\, r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Hieraus folgt leicht

$$19)\quad M = \frac{1}{6}\pi a^2 c\,(3a^2 + 2c^2)\,k$$

als die zu berechnende Masse.

§ 31. Mittelwerthe einer Function von drei Veränderlichen.*)

A.

Allgemeines.

Es sei eine Veränderliche u von drei willkürlichen Veränderlichen x, y und z abhängig nach der Gleichung:

$$1)\quad u = f(x, y, z).$$

Dabei mögen für die Werthe von x, y und z bestimmte Spielräume vorgeschrieben sein, nämlich für x der Spielraum von x_0 bis x_1, für y der von y_0 bis y_1, für z der von z_0 bis z_1, wobei die Gleichungen

$$2)\quad y_0 = \varphi_0(x),$$

$$3)\quad y_1 = \varphi_1(x),$$

$$4)\quad z_0 = \psi_0(x, y),$$

$$5)\quad z_1 = \psi_1(x, y)$$

Giltigkeit haben sollen.

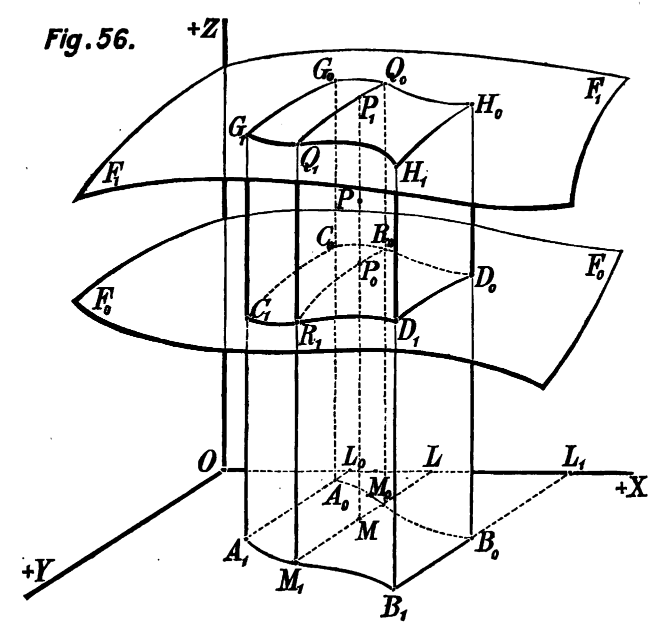
Im Sinne der Geometrie aufgefasst, heisst das (unter Benutzung rechtwinkliger Coordinaten): Der für die drei unabhängigen

*) Man vergleiche § 29.

Veränderlichen x, y und z vorgeschriebene Spielraum ist ein allseitig begrenzter Körper, nämlich $C_0\,D_0\,D_1\,C_1\,G_0\,H_0\,H_1\,G_1$ der Fig. 56, wobei

$$x_0 = O\,L_0, \quad x_1 = O\,L_1,$$
$$y_0 = L\,M_0, \quad y_1 = L\,M_1,$$
$$z_0 = M\,P_0, \quad z_1 = M\,P_1$$

ist und der Inhalt des Körpers mit V bezeichnet werden soll.



Es möge der für diesen Spielraum geltende Mittelwerth μ der Grösse u, nämlich das arithmetische Mittel der unendlich vielen u-Werthe, welche zu allen innerhalb des Spielraumes liegenden Werthen von x, y und z gehören, durch ein bestimmtes dreifaches Integral ausgedrückt werden und zwar im Sinne Desjenigen, was im § 29 unter A behandelt wurde, also — geometrisch aufgefasst — unter Zerlegung in Parallelepipede (die den Rechtecken des § 29 entsprechen). *)

Lösung. Wir denken uns (entsprechend § 29, A) den Spielraum $C_0\,D_0\,D_1\,C_1\,G_0\,H_0\,H_1\,G_1$ durch Ebenen, welche den

*) Siehe die „Anmerkung" auf Seite 131.

Coordinatenebenen parallel sind, in n gerade und rechtwinklige Parallelepipede von den Kantenlängen Δx, Δy und Δz derartig zerlegt, dass

$$6)\qquad n \,.\, \Delta x \Delta y \Delta z = V$$

ist. Nun lassen wir n ins Unendliche wachsen. Damit geht das Produkt $\Delta x \Delta y \Delta z$ in $dx\,dy\,dz$ über.

Zu jedem der unendlich vielen unendlich kleinen derartigen Produkte (Parallelepipede) gehört ein Werth von u. Das arithmetische Mittel aller u-Werthe ist bestimmt durch die Gleichung

$$7)\qquad \mu = \text{Lim}\,\frac{\Sigma f(x, y, z)}{n},$$

oder, wegen Nr. 6,

$$8)\qquad \mu = \text{Lim}\,\frac{\Sigma f(x, y, z) \,.\, \Delta x \Delta y \Delta z}{V},$$

wobei das Summenzeichen (Σ) selbstverständliche Bedeutung hat und die Summirung innerhalb der oben angegebenen Grenzen gemeint ist.

Nr. 8 giebt, zufolge des Begriffes des bestimmten dreifachen Integrals,

$$9)\qquad \mu = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Beachtet man, dass das in Nr. 9 stehende dreifache Integral $\left(\text{ohne den Factor } \frac{1}{V}\right)$ die Masse des Körpers $C_0 D_0 D_1 C_1 G_0 H_0 H_1 G_1$ bedeutet, wenn u, also $f(x, y, z)$, als die (in dem allgemeinen Punkte xyz herrschende) Dichtigkeit aufgefasst wird, so ergiebt sich der Satz: Der durch die Gleichung 9 definirte Mittelwerth einer Function von drei Veränderlichen ist der mittleren Dichtigkeit des durch die vorliegenden Grenzen bestimmten Körpers $C_0 D_0 D_1 C_1 G_0 H_0 H_1 G_1$ gleich.

Es bedarf also zur Herleitung eines derartigen Mittelwerthes stets einer Massenberechnung (vergleiche § 30) und, wegen V, einer Cubatur.

B.

Beispiele.

Für die Anwendung der Gleichung 9 möge die Behandlung folgender Aufgabe ein Beispiel sein:

Die Grösse u ist immer ein constantes Vielfaches, nämlich das k-fache, der Summe der Quadrate der drei Veränderlichen x, y und z. Für die Letzteren kommt in Betracht:

I. ein Spielraum, welchem zufolge x von 0 bis a, y von 0 bis $\sqrt{a^2 - x^2}$, z von 0 bis c reicht,

II. ein anderer, für den x zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, y zwischen 0 und x, z zwischen 0 und $c - 2x$ liegt,

wobei a und c positive constante Grössen bezeichnen.

Es sollen die beiden für diese zwei Spielräume geltenden Mittelwerthe μ_1 und μ_2 der Grösse u berechnet werden.

Lösung. I. Laut Nr. 9 ist für den ersten Fall

$$10)\quad \mu_1 = \frac{1}{V_1}\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^c k(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Dabei hat man

$$11)\quad V_1 = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^c dx\,dy\,dz;$$

also, laut § 28, Gleichung 40 und 46,

$$12)\quad V_1 = \frac{1}{4}\pi a^2 c.$$

Der Werth des unter Nr. 10 stehenden dreifachen Integrals ist durch die Gleichung 19 des § 30 bekannt.

Sie giebt, mit 12,

$$13)\quad \mu_1 = \frac{1}{6}k(3a^2 + 2c^2);$$

es ist nämlich μ_1 der mittleren Dichtigkeit des dort behandelten Cylinders gleich.

II. Für den zweiten Fall hat man:

$$14)\quad \mu_2 = \frac{1}{V_2}\int_0^{\frac{1}{2}c} \int_0^x \int_0^{c-2x} k(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Hierbei ist V_2 bekannt nach Gleichung 47 des § 28. Ferner das dreifache Integral nach § 30, Gleichung 16.

Führt man beide Werthe ein in 14, so folgt:

15) $$\mu_2 = \frac{1}{5} c^2 k,$$

nämlich die mittlere Dichtigkeit der in dem letztgenannten Paragraphen unter B behandelten Pyramide.

§ 32. Schwerpunkte.

A.

Der Satz, welcher im § 18 unter A genannt worden ist, soll im Nachfolgenden mit Benutzung mehrfacher Integration zu Schwerpunktsberechnungen verwendet werden (während im § 18 einfache Integration genügte).

Zunächst möge die Aufgabe gestellt sein, die Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes U der im § 18 unter D behandelten ebenen Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$, unter der Voraussetzung, dass sie nicht homogen sei, zu berechnen (durch bestimmte Doppelintegrale auszudrücken). Dabei soll angenommen werden, dass die Gleichung

1) $$\gamma = \varphi(x, y)$$

bestehe, nämlich das Gewicht γ der Flächeneinheit nach einem bekannten Gesetze von den Coordinaten x und y des allgemeinen Punktes der Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ abhänge. Im Uebrigen möge Das gelten, was bezüglich der im § 18 unter D behandelten Aufgabe dort gesagt worden ist.

Lösung. Das Flächenelement hat das Gewicht

2) $$dG = \gamma\, dx\, dy.$$

Demgemäss giebt der im § 18 unter A genannte Satz die Werthe

3) $$\xi = \frac{1}{G} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \gamma x\, dx\, dy$$

und

4) $$\eta = \frac{1}{G} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \gamma y\, dx\, dy,$$

in denen das Flächengewicht G bestimmt ist durch

5) $$G = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \gamma\, dx\, dy,$$

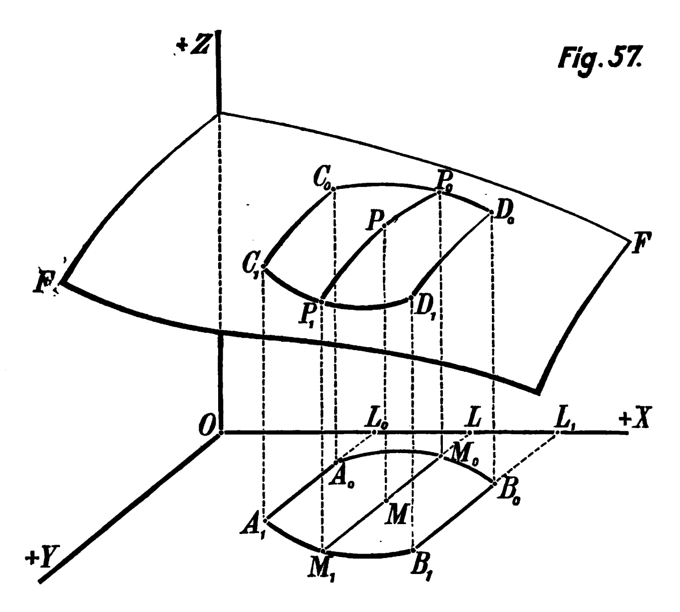
ferner für y_0 und y_1 die Gleichungen 23 und 24 des § 18 als gegeben vorausgesetzt sind.

In jedem besonderen Falle hat man zunächst die Werthe von γ, y_0, y_1, x_0 und x_1 in Nr. 3—5 einzusetzen. Dann kann die Durchführung der Integrationen beginnen.

Anmerkung zu A: Ist γ unveränderlich, so gehen die unter 3—5 stehenden Gleichungen in diejenigen über, welche im § 18 unter 25—27 gefasst sind. Man unterlasse nicht, das nachzuweisen.

B.

Nachdem im Vorhergehenden (§ 18, D und § 32, A) die Lage des Schwerpunktes ebener Flächen behandelt worden ist,



möge nun die allgemeiner Flächen Untersuchung finden. Es soll zu diesem Zwecke angenommen werden, dass die durch die Figur 57 dargestellte Fläche FF die Gleichung

$$6) \qquad z = \psi(x, y)$$

habe und man die Coordinaten ξ, η und $\mathfrak{z}$ des über $A_0 B_0 B_1 A_1$ liegenden Flächentheiles $C_0 D_0 D_1 C_1$ suche, nämlich durch Doppelintegrale auszudrücken wünsche. Dieser Flächentheil $C_0 D_0 D_1 C_1$

möge **h o m o g e n** vorausgesetzt werden. Bezüglich des Grundrisses $A_0\, B_0\, B_1\, A_1$ soll das im § 18 unter E Festgesetzte gelten. (Siehe Seite 72 und 73.)

L ö s u n g. Für den Inhalt des Flächenelementes besteht die Gleichung

$$7)\qquad dS = R\, dx\, dy,$$

wobei

$$8)\qquad R = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

ist. *)

Durch Benutzung des für die Gleichheit der statischen Momente geltenden Satzes (§ 18, A) ergiebt sich aus Nr. 7:

$$9)\qquad \xi = \frac{1}{S} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} R\, x\, dx\, dy,$$

$$10)\qquad \eta = \frac{1}{S} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} R\, y\, dx\, dy,$$

$$11)\qquad \zeta = \frac{1}{S} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} R\, z\, dx\, dy.$$

Der Inhalt S des Flächenstückes $C_0\, D_0\, D_1\, C_1$ ist hierbei bestimmt durch die Gleichung

$$12)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} R\, dx\, dy.$$

Sobald ein b e s o n d e r e r Fall vorliegt, man also die Flächengleichung kennt, lässt sich R berechnen und in 9—12 einführen. Ferner sind dann die Werthe von x_0, x_1, y_0 und y_1 aus der Art des Grundrisses $A_0\, B_0\, B_1\, A_1$ entnehmbar.

A n m e r k u n g e n z u B:

I. Es ist rathsam nachzuweisen, dass die Gleichungen 9—12 diejenigen in sich enthalten, welche früher in Bezug auf die Schwerpunkte von homogenen E b e n e n, C y l i n d e r f l ä c h e n und Quadranten von U m d r e h u n g s f l ä c h e n abgeleitet worden sind, nämlich die im § 18 unter 25—27, 31—35 und 46—48 stehenden.

*) Man sehe, wenn nöthig, S c h l ö m i l c h, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 99 der 5. Auflage.

II. Ferner empfiehlt es sich, Nr. 9—12 auf das elliptische Paraboloid

13) $$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

anzuwenden und hierbei vorauszusetzen, dass der Grundriss $A_0 B_0 B_1 A_1$ ein Ellipsenquadrant sei, welcher aus den Halbachsen a und b so construirt ist, dass letztere mit der X-, bezüglich Y-Achse zusammenfallen. Man findet für diesen besonderen Fall:

14) $$\xi = \frac{3\,[3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})]}{4\pi(2\sqrt{2}-1)}\,a,$$

15) $$\eta = \frac{b}{a}\,\xi,$$

16) $$\zeta = \frac{1+\sqrt{2}}{10\,(2\sqrt{2}-1)}\,(a+b).$$

Näheres hierüber: Fuhrmann, Aufgaben aus der analyt. Mechanik, Th. I, S. 70 u. 71 der 2. Auflage.

C.

Die auf Schwerpunkte sich beziehenden Untersuchungen sollen zum Abschluss kommen, indem folgende Aufgabe gelöst wird, welche allgemeine Körper betrifft:

In der XY-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems (Fig. 56 auf Seite 138) ist ein Grundriss $A_0 B_0 B_1 A_1$ gegeben durch die Gleichungen

17) $$y_0 = \varphi_0(x),$$

18) $$y_1 = \varphi_1(x)$$

der Linien $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ (wobei $OL = x$, $LM_0 = y_0$, $LM_1 = y_1$); ferner durch die Anfangsabscisse $OL_0 = x_0$ und durch die Endabscisse $OL_1 = x_1$.

Ueber dem Umfange jenes Grundrisses erheben sich Cylinderflächen, welche der Z-Achse parallel liegen. Sie durchbrechen zwei Flächen $F_0 F_0$ und $F_1 F_1$ in den Figuren $C_0 D_0 D_1 C_1$ und $G_0 H_0 G_1 H_1$. Diese Flächen haben die Gleichungen

19) $$z_0 = \psi_0(x, y),$$

bezüglich

20) $$z_1 = \psi_1(x, y),$$

in denen $y = LM$, $z_0 = MP_0$, $z_1 = MP_1$ ist.

Es sollen die Coordinaten ξ, η und ζ des Schwerpunktes des Körpers $C_0 D_0 D_1 C_1 G_0 H_0 H_1 G_1$ berechnet, nämlich durch Integrale ausgedrückt werden, unter der Voraussetzung, dass für das Gewicht γ der Volumeneinheit die Gleichung

$$21)\qquad \gamma = f(x, y, z)$$

gelte, also dieses Gewicht nach einem bekannten Gesetze von den Coordinaten OL, LM und MP des allgemeinen Punktes P abhänge.

Man soll ferner angeben, wie die Ergebnisse (für ξ, η und ζ) lauten, wenn γ constant ist; endlich: welche Form sie haben, wenn — bei constantem γ — die Flächen $F_0 F_0$ und $F_1 F_1$ Cylinderflächen sind, die der Y-Achse parallel liegen.

Lösung. Der im § 18 unter A genannte Satz giebt, wenn mit G das Gewicht des in Betracht gezogenen Körpers bezeichnet wird,

$$22)\qquad \xi = \frac{1}{G} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \gamma x \, dx \, dy \, dz,$$

$$23)\qquad \eta = \frac{1}{G} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \gamma y \, dx \, dy \, dz,$$

$$24)\qquad \zeta = \frac{1}{G} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \gamma z \, dx \, dy \, dz.$$

Dabei hat G den Werth

$$25)\qquad G = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \gamma \, dx \, dy \, dz.$$

In jedem besonderen Falle sind zunächst der Werth von γ und die aus der Begrenzung des Körpers sich ergebenden Werthe von x_0, x_1, y_0, y_1, z_0 und z_1 in Nr. 22—25 einzuführen. Nachher kann zur Durchführung der Integrationen geschritten werden.

Wenn γ unveränderlich ist und das Volumen des Körpers mit V bezeichnet wird, so gehen, aus nahe liegenden Gründen, die vorstehenden vier Gleichungen über in die einfacheren

$$26)\qquad \xi = \frac{1}{V} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} x (z_1 - z_0) \, dx \, dy,$$

27) $$\eta = \frac{1}{V} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} y (z_1 - z_0) \, dx \, dy,$$

28) $$\zeta = \frac{1}{2V} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (z_1^2 - z_0^2) \, dx \, dy,$$

29) $$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0) \, dx \, dy.$$

Sind $F_0 F_0$ und $F_1 F_1$ der Y-Achse gleichgerichtete Cylinderflächen, so hängen die Werthe von z_0 und z_1 nur von x, nicht auch von y, ab. Demzufolge verwandeln sich die Gleichungen Nr. 26—29 in folgende:

30) $$\xi = \frac{1}{V} \int_{x_0}^{x_1} x (y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \, dx,$$

31) $$\eta = \frac{1}{2V} \int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)(z_1 - z_0) \, dx,$$

32) $$\zeta = \frac{1}{2V} \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)(z_1^2 - z_0^2) \, dx,$$

33) $$V = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \, dx.$$

Anmerkungen zu C:

I. Man unterlasse nicht, zu zeigen, dass die Gleichungen 26—29 unmittelbar erhalten werden können, wenn stabförmige, der Z-Achse parallel liegende Elemente zur Benutzung gelangen; sodann, dass Nr. 30—33 sich direct ergeben, wenn man plattenförmige, der YZ-Ebene gleichgerichtete Elemente verwendet.

II. Ferner zeige man, in welcher Weise die Formeln Nr. 22—29 sich ändern, wenn der allgemeine Punkt P durch Polarcoordinaten (r, θ, ω) bestimmt gedacht wird, die Flächen, welche den Körper begrenzen, also durch ihre Polargleichungen gegeben sind. (Fuhrmann, Aufgaben a. d. analytischen Mechanik, Th. I, S. 85 und 86 der 2. Auflage.)

III. Endlich wende man die vorstehenden Gleichungen zur Berechnung der Lage des Schwerpunktes einer geraden

Pyramide an, deren Grundfläche ein Quadrat von der Seitenlänge $a\sqrt{2}$ und deren Höhe gleich a ist. Bezüglich der Dichtigkeit setze man voraus, dass sie dem Quadrate des Abstandes vom Grundflächenmittelpunkte proportional sei. — Es ergiebt sich: Der Schwerpunkt liegt auf der Pyramidenachse in dem Abstande

34) $$\mathfrak{z} = \frac{5}{18} a$$

von der Basis. (Fuhrmann, a. o. a. O., S. 84.)

§ 33. Trägheitsmomente.

A.

Im Anschlusse an Dasjenige, was in dem Abschnitte A des § 21 gesagt wurde, möge das Nachstehende (unter B und C) die Behandelung einiger Aufgaben darbieten, bei deren Lösung mehrfache Integration zu benutzen ist.

B.

Die erste dieser Aufgaben sei folgende: Es sollen die auf die Coordinatenachsen bezogenen Trägheitsmomente T_x und T_y der homogenen ebenen Fläche $A_0 B_0 B_1 A_1$ (Fig. 23 auf S. 71) berechnet, nämlich durch Integrale ausgedrückt werden, wobei für die Begrenzung jener Fläche das im § 18 unter D Gesagte Giltigkeit haben möge.

Lösung. Für die Differentiale der Trägheitsmomente hat man die Werthe

1) $$d\,T_x = \delta\,\varepsilon\,y^2\,dx\,dy$$

und

2) $$d\,T_y = \delta\,\varepsilon\,x^2\,dx\,dy,$$

in denen δ die Dicke und ε die Dichtigkeit der Fläche bezeichnet.

In den aus Nr. 1 und 2 folgenden Doppelintegralen ist die eine der Integrationen durchführbar. Das giebt:

3) $$T_x = \frac{1}{3}\,\delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (y_1{}^3 - y_0{}^3)\,dx$$

und

4) $$T_y = \delta\,\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} x^2\,(y_1 - y_0)\,dx.$$

10*

C.

Ferner möge die Aufgabe gestellt sein, die Richtigkeit der unter I—VII folgenden Sätze nachzuweisen:

I. Die auf die Halbachsen a und b bezogenen Trägheitsmomente eines homogenen Ellipsenquadranten haben die Werthe

5) $$T_a = \frac{1}{4} b^2 m$$

und

6) $$T_b = \frac{1}{4} a^2 m,$$

in denen m die Masse des Quadranten bedeutet, also

7) $$m = \frac{1}{4} \pi a b \delta \varepsilon$$

ist.

Anmerkung. Bezüglich der für T_a und T_b zunächst vorliegenden Doppelintegrale mit elliptischen Grenzen beachte man Dasjenige, was auf S. 129 (unter II) in Bezug auf die Umwandelung derselben gesagt wurde.

II. Für eine durch O (Fig. 23 auf S. 71) gehende, zur XY-Ebene senkrecht stehende Drehachse, hat die unter B genannte ebene Fläche $A_0 B_0 B_1 A_1$ das Trägheitsmoment

8) $$T_z = T_x + T_y.$$

III. Ist eine homogene allgemeine Fläche in derjenigen Weise gegeben, welche im § 32 unter B festgesetzt wurde, so gilt für das auf die Z-Achse bezogene Trägheitsmoment des Flächentheiles $C_0 D_0 D_1 C_1$ die Gleichung

9) $$T_z = \delta \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x^2 + y^2) R \, dx \, dy,$$

wobei R die in dem obigen Paragraphen unter Nr. 8 stehende Bedeutung hat.

IV. Ein Körper $C_0 D_0 D_1 C_1 G_0 H_0 H_1 G_1$ (Fig. 56 auf S. 138), welcher in der unter § 32, C, angeführten Weise begrenzt ist, hat bezüglich der Z-Achse des Coordinatensystems das Trägheitsmoment

10) $$T_z = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \varepsilon (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Hierbei bezeichnet ε die (im Allgemeinen von x, y und z abhängende) Dichtigkeit. Ist Letztere constant, so hat man:

11) $$T_z = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} (x^2 + y^2)(z_1 - z_0)\, dx\, dy.$$

(Nr. 11 folgt nicht nur aus 10, sondern auch direct, wenn man stabförmige Elemente benutzt. Es genügt also für die Herleitung des Trägheitsmomentes eines homogenen Körpers immer die Doppelintegration.)

V. Hat eine gerade, regelmässige, sechsseitige Pyramide die Grundflächenseite a und die Höhe h, so ist das auf letztere bezogene Trägheitsmoment

12) $$T = \frac{1}{8}\sqrt{3}\, a^4 h \varepsilon = \frac{1}{4} a^2 m,$$

wenn m die Pyramidenmasse bedeutet.

Anmerkung. Zu Nr. 12 kann man gelangen, indem man ein Coordinatensystem benutzt, dessen Z-Achse mit der Höhe h und dessen XY-Ebene mit der Pyramidengrundfläche so zusammenfällt, dass die X-Achse die eine Basiskante halbirt. Es führt dann die Berechnung von $\frac{1}{12}T$ auf das im § 28 unter A, III, behandelte dreifache Integral. Letzteres kann, von Anfang an, durch das unter Nr. 4 daselbst stehende Doppelintegral ersetzt werden, wenn man stabförmige Elemente verwendet.

VI. Ist die Dichtigkeit einer Kugel proportional dem Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte und für die Einheit jenes Abstandes gleich k, so hat das auf einen Durchmesser bezogene Trägheitsmoment den Werth

13) $$T = \frac{8}{21}\pi k a^7 = \frac{10}{21} a^2 m,$$

wobei a den Halbmesser bezeichnet und m die Masse.

VII. Der im § 21 unter Nr. 15 für Curven abgeleitete auf parallele Drehachsen sich beziehende Satz

14) $$T_1 = T + k^2 m$$

gilt auch für Flächen und Körper.*)

*) Diejenigen, welche Erweiterungen der §§ 21 und 33 wünschen, mögen auf die betreffenden Abschnitte der im „Literaturverzeichniss" genannten Bücher von Duhamel, Fuhrmann, Ritter, Schell und Voigt verwiesen sein.

§ 34. Anziehung einiger Flächen und Körper.

A.

Die Anziehung der Kreisfläche und der unbegrenzten Ebene.

I.

Ehe die von einem allgemeinen Körper ausgeübte Anziehung zur Behandlung gelangt (§ 35), sollen im Nachstehenden, unter A—C, einige besondere Fälle Erledigung finden und zwar mit Benutzung des im § 20 unter A Gesagten. Zuerst möge folgende Aufgabe gelöst werden:

Eine homogene Kreisfläche hat den Halbmesser a, die (sehr kleine) constante Dicke δ und die ebenfalls constante Dichtigkeit ε. Senkrecht über dem Mittelpunkte C befindet sich ein Punkt Q, von der Masse 1, in dem Abstande $QC = c$. Dieser Punkt Q wird durch die Kreisscheibe nach dem Newton'schen Gesetze angezogen. Man soll den Werth A der Anziehung berechnen, nämlich durch a, c, k, δ und ε ausdrücken (wobei k den Anziehungscoefficienten bezeichnet, also die im § 20 unter A genannte Bedeutung hat).

Lösung. Wir denken uns den allgemeinen Punkt P der Kreisfläche bestimmt durch seinen Leitstrahl r und die zugehörige Anomalie θ, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Pol mit dem Kreisflächencentrum und dessen Achse mit einem Halbmesser zusammenfällt. Dann übt das bei P befindliche Massenelement ($\delta \varepsilon r \, d\theta \, dr$, laut § 28, Gleichung 13) auf Q die Anziehung

1) $$dR = \frac{k \delta \varepsilon r \, d\theta \, dr}{c^2 + r^2}$$

in der Richtung QP aus.

Diese Anziehung ist in zwei Componenten zerlegbar, deren eine in die Ebene der Scheibe fällt, während die andere senkrecht zu ihr steht. Alle Componenten der ersten Art heben sich auf; die der zweiten geben (im Sinne QC) die Anziehung

2) $$A = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{k c \delta \varepsilon r \, d\theta \, dr}{\sqrt{c^2 + r^2}^3},$$

also

3) $$A = 2\pi k \delta \varepsilon \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right),$$

oder

4) $$A = 2\pi k \delta \varepsilon \left(1 - \frac{c}{b}\right),$$

wenn mit b der Abstand des angezogenen Punktes vom Scheibenrande bezeichnet, nämlich $\sqrt{a^2 + c^2} = b$ gesetzt wird.

II.

Durch Benutzung der Gleichungen 3 oder 4 lässt sich leicht zeigen, dass die unter α—γ folgenden Sätze (deren Ableitung nicht unterbleiben möge) gelten:

α) Der Anziehungsmittelpunkt der Scheibe hat, auf QC liegend, von Q den Abstand

5) $$\varrho = a \sqrt{\frac{b}{2(b-c)}},$$

welcher sich leicht aus den gegebenen Strecken a und c construiren lässt.

β) Eine unendlich grosse homogene Kreisscheibe, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, eine nach allen Seiten hin in's Unendliche sich ausdehnende homogene Ebene, übt auf den Punkt Q die Anziehung

6) $$A_1 = 2\pi k \delta \varepsilon$$

aus (die also endlich ist und von c nicht abhängt).

γ) So lange c, verglichen mit b, einen sehr kleinen Werth hat, beeinflusst es die Anziehung A wenig, so dass letzterer dann näherungsweise immer der Betrag Nr. 6 zukommt.

Anmerkungen zu A:

a) Das unter γ Ausgesprochene ist z. B. für die Geodäsie zu beachten. (Man vergleiche: Helmert, mathemat. und physikalische Theorien, Bd. 2, S. 142 u. folg.)

b) Die Ableitung der Gleichung Nr. 3 kann durch einfache Integration erfolgen, indem man als Element die Masse eines Kreisringes benutzt, welcher mit den Halbmessern r und $r + dr$ beschrieben ist.

B.

Anziehung der Kugelfläche und des Kugelvolumens.

I.

Nachdem im Vorhergehenden, unter A, die Anziehung einer ebenen Fläche behandelt worden ist, möge nun für eine krumme — und zwar für die Kugelfläche von der Dicke δ und der

Dichtigkeit ε — die entsprechende Untersuchung folgen. Dabei soll die Aufgabe folgendermassen lauten:

Um O (Fig. 47 auf S. 120) ist, mit dem Halbmesser a, eine Kugelfläche beschrieben. Sie wirkt, nach dem Newton'schen Gesetze, anziehend auf einen Punkt Q, von der Masse 1, welcher von O den Abstand $c > a$ hat. Es soll die durch jene Fläche auf Q ausgeübte Anziehung berechnet werden (ausgedrückt durch a, c, k, δ, ε) und zwar — zur Uebung — auf verschiedene Weisen, nämlich

α) indem man sich den allgemeinen Flächenpunkt P mittelst der rechtwinkligen Coordinaten $OL = x$, $LP' = y$, $P'P = z$ bestimmt denkt und für das Element den durch die Gleichungen Nr. 7 und 8 von Seite 143 gegebenen Ausdruck benutzt, also die Kugelfläche zunächst wie eine allgemeine, durch die Gleichung

$$7) \qquad z = f(x, y)$$

gekennzeichnete Fläche auffasst;

β) indem man sich P (Fig. 47) durch die Coordinaten $\angle AOP = \varphi$, $\angle P'LP = \omega$ gegeben denkt, also in Bezug auf φ und ω integrirt; endlich, was am meisten zu empfehlen ist,

γ) durch einfache Integration mit Benutzung von unendlich schmalen Kugelzonen.

Lösung. α) Die Anziehung, welche Q von dem bei P liegenden materiellen Flächenelemente in der Richtung QP erleidet, hat, wenn rechtwinklige Coordinaten zur Benutzung gelangen, den Werth

$$8) \qquad dR = \frac{k\delta\varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}{(c-x)^2 + y^2 + z^2}.$$

Derselbe giebt im Sinne der Achsen drei Componenten, von denen zwei aufgehoben werden. Für die dritte (parallel zu QO wirkende) Componente hat man, nachdem die aus der Kugelflächengleichung folgenden Werthe der partiellen Differentialquotienten eingeführt sind, den Betrag

$$9) \qquad dA = k a \delta \varepsilon \frac{(c-x)\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, \sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}^3}.$$

Die Summirung aller derartigen Componenten führt auf das im § 28 unter A behandelte Doppelintegral II; damit aber (laut § 1, IV) auf:

10) $$A = \frac{4\pi a^2 k \delta \varepsilon}{c^2},$$

oder, wenn mit m die Masse der Kugelfläche bezeichnet wird, auf

11) $$A = \frac{k m}{c^2}.$$

Das sagt: Die Anziehung, welche der (ausserhalb liegende) Punkt Q erfährt, ist eben so gross, als wenn die Kugelflächenmasse im Centrum vereinigt wäre.

β) Werden zur Festlegung des allgemeinen Punktes P die Winkel $AOP = \varphi$, $P'LP = \omega$ benutzt, so hat das Flächenelement den Werth $a^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\omega$.

Demgemäss ergiebt sich:

12) $$A = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{k a^2 \delta \varepsilon (c - a\cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\omega}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}^3},$$

was sogleich auf

13) $$A = 2\pi k \delta \varepsilon a^2 \int_0^{\pi} \frac{(c - a\cos\varphi)\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}^3}$$

führt. Benutzt man nun die (sehr nahe liegende) Substitution

14) $$\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi} = u$$

und beachtet gehörig die geometrische Bedeutung derselben (also den Umstand, dass die neue Veränderliche die Entfernung QP ist), so folgt wieder Nr. 10.

γ) Die unendlich schmale, materielle Kugelzone, von welcher MPN (Fig. 47) einen Quadranten andeutet und $a\,d\varphi$ die Breite ist, hat die Masse

15) $$dm = (2\pi a^2 \sin\varphi \, d\varphi)\,\delta\varepsilon.$$

Alle Theile dieser Masse wirken auf Q in derselben Weise. Daher zieht jene Zone den genannten Punkt im Sinne QO an mit der Stärke

16) $$dA = \frac{2\pi k a^2 \delta \varepsilon (c - a\cos\varphi)\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}^3}.$$

Die durch Nr. 16 ausgedrückten Anziehungselemente sind von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ zu summiren. Man kommt also auf diesem Wege unmittelbar zu dem einfachen Integrale Nr. 13 (und mittelst desselben auf den Werth 10).

II.

Auf einen in ihrem Innenraume liegenden Punkt Q übt, was sich leicht durch Integration, oder auch rein geometrisch, nachweisen lässt, die Kugelfläche keine Anziehung aus. (Man sehe hierüber, wenn nöthig, Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, S. 173—174 der 4. Auflage; oder, bezüglich des von Newton angegebenen geometrischen Verfahrens: Helmert, mathemat. u. physikal. Theorien, Bd. 2, S. 62, Anmerkung).

Das im Vorhergehenden für die Anziehung der Oberfläche der Kugel Gefundene lässt sich (aus nahe liegendem Grunde) auf das Volumen der Hohlkugel und der Vollkugel leicht übertragen. Ferner erkennt man, dass es nicht nur für homogene Kugelmassen gilt, sondern auch für solche, deren Dichtigkeit sich nach concentrischen Schalen ändert.

Anmerkung. Ueber andere, im Vorhergehenden (unter I) nicht enthaltene Methoden zur Ermittelung der Anziehung einer Kugelfläche sehe man: Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, S. 661—664 der 1., oder Bd. 2, S. 284—288 der 2. Auflage.

C.

Anziehungen, verursacht durch Hochebenen, Berge u. s. w.

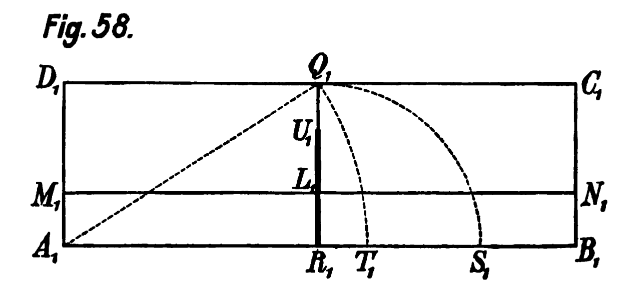
Wenn es sich darum handelt, den Einfluss zu berechnen, welcher durch die Anziehung von Hochebenen, Bergen u. s. w. ausgeübt wird, so pflegt man die Voraussetzung zu machen, dass dieselben Umdrehungskörper seien, nämlich Cylinder, Kegel, Kugelabschnitte, oder Paraboloide.

Es kann dann der unter A für die Kreisfläche abgeleitete Satz (Gleichung 4) zur Ermittelung jener Anziehung benutzt werden, indem man sich den betreffenden Körper aus unendlich vielen (unendlich dünnen) Kreisscheiben zusammengesetzt denkt.

In diesem Sinne mögen die unter I—III folgenden Aufgaben gestellt sein.

I.

Ein homogener Cylinder $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 58) hat den Grundflächenhalbmesser a, die Höhe h. Im Centrum der Deckfläche liegt ein Punkt Q_1, von der Masse 1.



Es soll die von dem Cylinder auf Q_1 ausgeübte Anziehung A_1 berechnet werden; auch soll man angeben, welchen Näherungswerth sie hat, falls h, mit a verglichen, so klein ist, dass $\frac{\sqrt{a^2+h^2}-a}{h}$ gegen 1 vernachlässigt werden darf.

Lösung. Eine von der Deckfläche um $Q_1 L_1 = z$ abstehende, unendlich dünne Schicht $M_1 N_1$ (Dicke dz) zieht, laut Gleichung 4, den Punkt Q_1 mit der Stärke

17) $$dA_1 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) dz$$

an, wobei k und ε die frühere Bedeutung haben.

Es ist also

18) $$A_1 = 2\pi k \varepsilon \int_0^h \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) dz.$$

Aus Nr. 18 folgt:

19) $$A_1 = 2\pi k \varepsilon \left(a + h - \sqrt{a^2+h^2}\right);$$

oder, wenn

20) $$A_1 Q_1 = b$$

gesetzt wird,

21) $$A_1 = 2\pi k \varepsilon (a + h - b).$$

Hierbei stellt der in der Klammer stehende Werth den Unterschied zwischen der Kathetensumme und der Hypotenuse des Drei-

ecks $A_1 Q_1 R_1$ dar. Wird also, wie Fig. 58 es zeigt, $R_1 S_1 = R_1 Q_1$, $A_1 T_1 = A_1 Q_1$, $R_1 U_1 = T_1 S_1$ gemacht, so hat man:

22) $$A_1 = 2\pi k\varepsilon . R_1 U_1.$$

Ist die Höhe des Cylinders als Bruchtheil des Grundflächenhalbmessers gegeben, nämlich durch die Gleichung

23) $$a = nh,$$

so haben Nr. 19 und 21 die Form

24) $$A_1 = 2\pi k\varepsilon (n + 1 - \sqrt{n^2 + 1})\, h.$$

Endlich folgt aus 19, dass

25) $$A_1 = 2\pi k\varepsilon h$$

den durch die Aufgabe verlangten Näherungswerth darstellt. (Man vergleiche Nr. 25 mit 6; wende ferner Nr. 24 auf einen besonderen Fall an; etwa auf den Fall $n = 1000$.)

Anmerkungen zu I:

α) Ohne Schwierigkeiten lässt sich ermitteln, wie das Vorhergehende sich ändert, wenn der angezogene Punkt Q_1 irgendwo auf der Achse liegt.

Ferner, welche Anziehungen durch einen unendlich langen Cylinder ausgeübt werden.

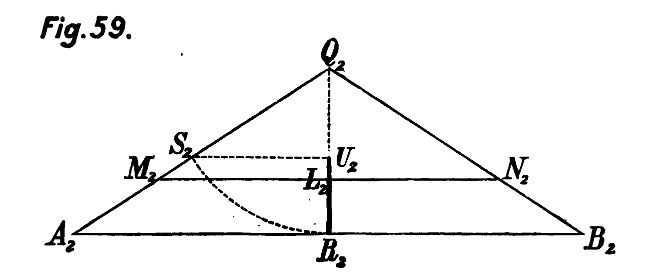
Desgleichen, wo der Anziehungsmittelpunkt liegt und wie man ihn durch Construction zu finden vermag.

Es möge die Ausführung dieser Untersuchungen hiermit empfohlen sein. (Näheres über dieselben: Fuhrmann, Aufgaben aus der analyt. Mechanik, Theil I, S. 132—134 der 2. Auflage.)

β) Man beachte das unter IV, a und c, Folgende.

II.

Der homogene Kegel $A_2 B_2 Q_2$ (Fig. 59) möge mit dem unter I behandelten Cylinder gleiche Grundfläche und Höhe haben.



Es soll die Anziehung A_2 berechnet werden, welche er auf den in seiner Spitze befindlichen Punkt Q_2 (von der Masse 1) ausübt. Ferner soll man angeben, welcher Näherungswerth für A_2 Giltigkeit hat, wenn h, verglichen mit a, so klein ist, dass $\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$ der Einheit gegenüber unbeachtet bleiben darf.

Lösung. Unter Benutzung der kreisscheibenförmigen Schicht $M_2 N_2$, welche von Q_2 um $Q_2 L_2 = z$ absteht, ergiebt sich, auf dem bei I genannten Wege:

26) $$A_2 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) h.$$

Wird

27) $$A_2 Q_2 = b$$

gesetzt, was der Gleichung 20 entspricht, so hat man:

28) $$A_2 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{h}{b}\right) h = 2\pi k \varepsilon \frac{(b-h)h}{b},$$

oder

29) $$A_2 = 2\pi k \varepsilon (1 - \cos\alpha) h = 4\pi k \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}\alpha . h,$$

wobei α den Winkel $A_2 Q_2 R_2$ bezeichnet.

Macht man also, wie Fig. 59 es zeigt, $Q_2 S_2 = Q_2 R_2$, $S_2 U_2 \perp Q_2 R_2$, so ist

30) $$A_2 = 2\pi k \varepsilon . R_2 U_2,$$

was mit Nr. 22 verglichen werden möge.

Wenn die unter I stehende Gleichung 23 Giltigkeit hat, nämlich die Kegelhöhe als Bruchtheil des Grundflächenhalbmessers gegeben ist, so haben Nr. 28 und 29 die Form

31) $$A_2 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) h,$$

welche Nr. 24 entspricht (und wieder auf den besonderen Fall $n = 1000$ angewendet werden möge).

Der in der Aufgabe verlangte Näherungswerth ist, laut 28:

32) $$A_2 = 2\pi k \varepsilon h,$$

stimmt also mit Nr. 25 überein.

Anmerkungen zu II.

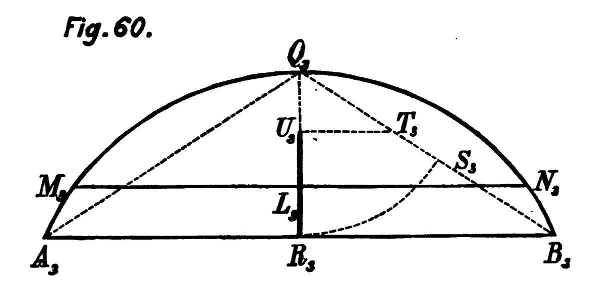
α) Das unter II Stehende ist leicht zu verallgemeinern, indem man die Anziehung des Kegels

(auch des abgestumpften) auf irgend einen Punkt seiner Achse untersucht. (Hierüber: Fuhrmann, Aufgaben aus der analyt. Mechanik, Theil I, Seite 134—136 der 2. Auflage. Oder: Schlömilch, Attractionscalcül, Seite 9—12.)

β) Man vergleiche Das, was unter IV, *a*, folgt.

III.

Der durch Fig. 60 dargestellte homogene Kugelabschnitt $A_3 B_3 Q_3$ möge wieder mit dem unter I behandelten Cylinder, also auch mit dem unter II betrachteten Kegel, gleiche Grundfläche und Höhe haben. Es sei auch hier die Anziehung A_3 zu berechnen,



welche jener Abschnitt auf den im Scheitel liegenden Punkt Q_3 (Masse 1) äussert. Ferner möge derjenige Näherungswerth von A_3 Ableitung finden, welcher vorliegt, wenn h, mit a verglichen, so klein ist, dass $\frac{2}{3}$ von $\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$ gegen 1 vernachlässigt werden dürfen.

Lösung. Für die Anziehung, welche Q_3 durch eine um $Q_3 L_3 = z$ abstehende Schicht $M_3 N_3$ (von der Dicke dz) erfährt, findet man, unter Benutzung von Nr. 4:

$$33) \qquad dA_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \sqrt{\frac{z}{2c}}\right) dz,$$

wobei c den Kugelhalbmesser bezeichnet, daher durch die Gleichung

$$34) \qquad c = \frac{a^2+h^2}{2h}$$

bestimmt ist.

Aus Nr. 33 folgt durch Integration:

35) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{2c}}\right) h,$$

oder, mit Benutzung von 34,

36) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{2}{3}\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right) h.$$

Wird, entsprechend Nr. 20 und 27,

37) $$A_3 Q_3 = b$$

gesetzt und der Winkel $A_3 Q_3 R_3$ mit α bezeichnet, so geht 36 über in:

38) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{2}{3}\frac{h}{b}\right) h,$$

bezüglich in

39) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{2}{3}\cos\alpha\right) h.$$

Wenn also, was Fig. 60 darstellt, $Q_3 S_3 = Q_3 R_3$, $Q_3 T_3 = \frac{2}{3} Q_3 S_3$, $T_3 U_3 \perp Q_3 R_3$ genommen wird, so ist

40) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \,.\, R_3 U_3,$$

was mit Nr. 22 und 30 verglichen werden möge.

Besteht die Beziehung 23, so hat man, entsprechend Nr. 24 und 31:

41) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right) h.$$

Endlich ergiebt sich für den gesuchten Näherungswerth, aus 36:

42) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon h,$$

also das unter 25 und 32 Gefundene.

Anmerkungen zu III:

α) Wird der Kugelabschnitt zur Halbkugel, so ist, laut 38,

43) $$A_3 = 2\pi k \varepsilon \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) c.$$

Wendet man ferner Nr. 38 auf die Vollkugel an, so ergiebt sich

44) $$A_3 = \frac{4}{3}\pi k c \varepsilon = \frac{km}{c^2},$$

was mit dem unter B, II, Gefundenen übereinstimmt.

Man unterlasse nicht, die Gleichungen 43 und 44 herzuleiten.

β) Das unter III Behandelte lässt sich leicht auf den Fall, in welchem Q_3 (Fig. 60) oberhalb der Kugelschicht, nicht auf ihrer Oberfläche, liegt, erweitern, was hiermit empfohlen sein möge.

γ) Man sehe das unter IV, a und d, Folgende.

IV.

a) Das Verhältniss der Anziehungen, welche der Cylinder $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 58), der Kegel $A_2 B_2 Q_2$ (Fig. 59) und der Kugelabschnitt $A_3 B_3 Q_3$ (Fig. 60) auf das obere Achsenende ausüben, ist, gemäss I—III, ein ziemlich einfaches. Es verhält sich nämlich, was man sofort den betreffenden Gleichungen entnehmen kann,

45) $$A_1 : A_2 : A_3 = 1 - \frac{b-a}{h} : 1 - \frac{h}{b} : 1 - \frac{2}{3}\frac{h}{b},$$

oder, bezogen auf Fig. 58—60,

46) $$A_1 : A_2 : A_3 = R_1 U_1 : R_2 U_2 : R_3 U_3.$$

b) In der unter I—III angegebenen Weise, nämlich durch Benutzung der Gleichung 4, lässt sich auch die Anziehung ermitteln, welche ein Umdrehungsparaboloid auf seinen Scheitel ausübt. Durchführung der betreffenden Rechnung sei hiermit empfohlen.

c) Die Gleichungen 19—25 können benutzt werden, wenn es gilt zu ermitteln, welchem Einflusse Wägungen unterliegen, falls sie, statt an der Meeresoberfläche, auf einer Hochebene, z. B. in München, zur Ausführung gelangen, daher die Anziehung der Masse jener Hochebene zu berücksichtigen ist. Hierüber sehe man: Jolly, die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation; 1881.

Ferner finden die Gleichungen Nr. 19—25 Anwendung, wenn es sich darum handelt, die für eine bekannte Höhe, z. B. diejenige von Paris, geltende Länge des Sekundenpendels auf die Meeresoberfläche zu reduciren. Hierüber: Poisson, Lehrbuch der Mechanik, Theil I, § 255 der Uebersetzung von A. Stern. Oder: Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, Seite 159—163 der 4. Auflage.

Desgleichen lassen sich Nr. 19—25 benutzen bei der Untersuchung eines wagenartigen Instrumentes, welches zur Auffindung von Erzlagern in Vorschlag gebracht worden ist.

(Fuhrmann, Aufg. a. d. Mechanik, Theil I, S. 137 und 138 der 2. Auflage.)

d) Von den Gleichungen 35 und 42 wird für die Theorie des Siemens'schen Bathometers (Seetiefenmessers) Gebrauch gemacht. Dasselbe beruht auf einer Anwendung der Thatsache, dass auf dem Meere die Anziehung geringer ist, als auf dem Festlande, weil Seewasser ein kleineres specifisches Gewicht hat, als Erde. Näheres hierüber: Günther, Geophysik, Bd. 2, Seite 331 und 332. Oder: Dingler's Polytechnisches Journal, Bd. 221, S. 48—54. (Abhandlung von *E—e*; mit Abbildungen des Bathometers.)

e) Die unter *c* und *d* genannten Anwendungen sind, was man leicht erkennt, nahe verwandt. Ferner stehen sie in enger Beziehung zu geodätischen Untersuchungen, bei denen es sich um die Berücksichtigung der Anziehung von Festlandmassen oder Wassermassen handelt. Man sehe: Helmert, mathemat. und physikal. Theorien, Bd. 2, S. 141 u. folgende. (Besonders S. 163, § 16; S. 167, § 17; S. 179, § 21.)

§ 35. Die Anziehung des allgemeinen Körpers und das Potential. Beziehungen zum Magnetismus, zur Elektricität und zum Lichte.

A.

Ein Körper $C_0 D_0 D_1 C_1 G_0 H_0 H_1 G_1$, veranschaulicht durch die Fig. 56 auf S. 138, möge, wie dort, auf ein rechtwinkliges System bezogen, gegeben sein durch

$$OL_0 = x_0,\quad OL_1 = x_1,$$

ferner durch die Gleichungen

1) $$y_0 = LM_0 = \varphi_0(x),$$

2) $$y_1 = LM_1 = \varphi_1(x),$$

der Linien $A_0 B_0$, bezüglich $A_1 B_1$, endlich durch die Gleichungen

3) $$z_0 = MP_0 = \psi_0(x, y),$$

4) $$z_1 = MP_1 = \psi_1(x, y)$$

der Flächen $F_0 F_0$, beziehentlich $F_1 F_1$.

Die Dichtigkeit γ des Körpers soll (im Allgemeinen) veränderlich sein, nämlich nach einem bestimmten Gesetze abhängen von den Coordinaten

$$OL = x,\quad LM = y,\quad MP = z$$

der betreffenden Stelle P; es soll also eine Gleichung von der Form

$$5) \qquad \gamma = f(x, y, z)$$

bestehen.

Der Körper möge proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung anziehend wirken auf einen (in der Fig. 56 weggelassenen) mit der Masse 1 versehenen Punkt U, dessen Coordinaten a, b und c sind.

Man soll diejenigen Anziehungen, A, B, C, welche der genannte Körper auf U im Sinne der X-Achse, Y-Achse und Z-Achse ausübt, berechnen, nämlich durch bestimmte dreifache Integrale ausdrücken.

Lösung. Das bei dem allgemeinen Punkte P (Coordinaten: x, y, z) befindliche Volumenelement

$$6) \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

hat die Masse

$$7) \qquad dm = \gamma \, . \, dV.$$

Es zieht jenes Element den Punkt U in der Richtung UP an mit der Intensität

$$8) \qquad \frac{k \, . \, dm}{u^2},$$

wobei

$$9) \qquad u = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

und k, wie früher, der „Anziehungscoefficient", nämlich diejenige Anziehung, welche die Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt. *)

Die durch Nr. 8 ausgedrückte Anziehung liefert in der Richtung der X-Achse die Componente:

$$10) \qquad \frac{k\,dm}{u^2} \cos(u, x) = \frac{k(a-x)}{u^3} dm;$$

ferner in der der Y-Achse:

$$11) \qquad \frac{k\,dm}{u^2} \cos(u, y) = \frac{k(b-y)}{u^3} dm;$$

endlich in der der Z-Achse:

$$12) \qquad \frac{k\,dm}{u^2} \cos(u, z) = \frac{k(c-z)}{u^3} dm.$$

*) Man beachte auch hier die am Fusse der Seite 79 stehende Anmerkung.

Die Anziehungen, welche der ganze Körper in den Richtungen der X-Achse, Y-Achse und Z-Achse ausübt, haben daher, der Reihe nach, die Werthe

$$13)\qquad A = k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\gamma\frac{a-x}{u^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$14)\qquad B = k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\gamma\frac{b-y}{u^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$15)\qquad C = k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\gamma\frac{c-z}{u^3}\,dx\,dy\,dz,$$

oder, vollständiger geschrieben (laut Nr. 9):

$$16)\qquad A = k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\gamma(a-x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}^{\,3}},$$

$$17)\qquad B = k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\gamma(b-y)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\quad\div\quad}^{\,3}},$$

$$18)\qquad C = k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\gamma(c-z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\quad\div\quad}^{\,3}},$$

wobei γ bestimmt ist durch die Gleichung 5.

B.

In manchen Fällen ist es vortheilhaft, Polarcoordinaten, an Stelle der rechtwinkligen, für den anziehenden Körper zu benutzen, hinsichtlich des angezogenen Punktes aber die vorige Bestimmungsweise (also die Coordinaten a, b und c) beizubehalten.

Es sollen die Gleichungen 16, 17 und 18 in diesem Sinne Umgestaltung finden, wobei der Leitstrahl OP mit ϱ, der Winkel XOP mit ϑ und der Flächenwinkel MLP mit ω bezeichnet werden möge. Bezüglich des Dichtigkeitsgesetzes soll (Nr. 5 entsprechend) vorausgesetzt werden, dass es durch eine Gleichung von der Form

$$19)\qquad \gamma = F(\varrho, \vartheta, \omega)$$

gegeben sei.

Lösung. Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den Polarcoordinaten ϱ, ϑ, ω bestehen (was man der Fig. 56 leicht entnehmen kann) die Beziehungen:

20) $$x = \varrho \cos \vartheta,$$

21) $$y = \varrho \sin \vartheta \cos \omega,$$

22) $$z = \varrho \sin \vartheta \sin \omega.$$

Ferner ergiebt die Anschauung (vergleiche § 28, Gleichung 35), dass bei Benutzung der neuen Coordinaten dem Volumenelemente der Werth

23) $$d V = \varrho^2 \sin \vartheta \, d \varrho \, d \omega \, d \vartheta$$

zukommt.

Es gehen mithin die Gleichungen 16, 17, 18 über in:

24) $$A = k \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\gamma (a - \varrho \cos \vartheta) \varrho^2 \sin \vartheta \, d \varrho \, d \omega \, d \vartheta}{\sqrt{(a - \varrho \cos \vartheta)^2 + (b - \varrho \sin \vartheta \cos \omega)^2 + (c - \varrho \sin \vartheta \sin \omega)^2}^3},$$

25) $$B = k \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\gamma (b - \varrho \sin \vartheta \cos \omega) \varrho^2 \sin \vartheta \, d \varrho \, d \omega \, d \vartheta}{\sqrt{\quad \div \quad}^3},$$

26) $$C = k \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\gamma (c - \varrho \sin \vartheta \sin \omega) \varrho^2 \sin \vartheta \, d \varrho \, d \omega \, d \vartheta}{\sqrt{\quad \div \quad}^3},$$

wobei die Buchstaben ϱ_0, ϱ_1, ω_0, ω_1, ϑ_0, ϑ_1 diejenigen Integrationsgrenzen bezeichnen, welche sich bezüglich der Veränderlichen ϱ, ω, ϑ aus der Art der Begrenzung des anziehenden Körpers ergeben, ferner γ durch Nr. 19 bestimmt ist.

C.

Die Anziehungscomponenten A, B, C können durch ein einziges dreifaches Integral ausgedrückt werden, wenn die in Bezug auf a, b und c genommenen partiellen Differentialquotienten der Function

27) $$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}}$$

gehörige Ausnutzung finden.

Man ermittele dieses Integral, welches das Potential (die Kräftefunction der Anziehung) genannt wird, und P heissen möge,

I. für rechtwinklige,

II. für Polarcoordinaten;

auch nenne man diejenigen Rechenoperationen, durch deren Anwendung die Componenten A, B und C aus P sich ergeben.

Lösung. I. Die in 13—15, oder 16—18, vorliegenden Werthe von A, B und C unterscheiden sich nur durch die, in den drei Zählern stehenden, Factoren $(a-x)$, $(b-y)$ und $(c-z)$.

Es ist aber, laut 27,

$$\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial a} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\div}}}{\partial a} = -\frac{a-x}{\sqrt{\div}^3},$$

also

28) $$\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial a} = -\frac{a-x}{u^3};$$

ferner, was ebenso sich ergiebt:

29) $$\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial b} = -\frac{b-y}{u^3}$$

und

30) $$\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial c} = -\frac{c-z}{u^3}.$$

Man darf daher statt 13—15 schreiben:

31) $$A = -k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\gamma\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial a}\,dx\,dy\,dz,$$

32) $$B = -k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\gamma\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial b}\,dx\,dy\,dz,$$

33) $$C = -k\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\gamma\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial c}\,dx\,dy\,dz.$$

Hieraus folgt: die negativen Werthe von A, B und C ergeben sich aus dem (für ganz allgemeine, nicht für specialisirte, a, b und c ermittelten) Integrale

34) $$P = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\gamma\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}$$

als die partiell in Bezug auf a, b und c genommenen Differentialquotienten des letzteren; man hat nämlich:

35) $$A = -k\frac{\partial P}{\partial a},$$

36) $$B = -k\frac{\partial P}{\partial b},$$

37) $$C = -k\frac{\partial P}{\partial c}.$$

Dabei verdient auch die physikalische Bedeutung des Potentials (Nr. 34) Beachtung. Dasselbe ist nämlich die Summe derjenigen unendlich vielen unendlich kleinen Grössen, welche sich ergeben, indem man jedes Massenelement des anziehenden Körpers durch die zugehörige Entfernung (vom angezogenen Punkte U) dividirt.

II. Für Polarcoordinaten hat das Potential, gemäss 34, 6 und 20—23, den Werth

38) $$P = \int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\gamma\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\omega\, d\vartheta}{\sqrt{(a-\varrho\cos\vartheta)^2+(b-\varrho\sin\theta\cos\omega)^2+(c-\varrho\sin\theta\sin\omega)^2}}.$$

D.

Zur Ergänzung und Erweiterung Desjenigen, was im Vorhergehenden (unter A—C) behandelt wurde, diene das unter I—VI hier Folgende.

I. Ist der anziehende Körper homogen, so vereinfachen sich die vorhergehenden Formeln sehr, weil dann γ, als Constante, vor die Integralzeichen gesetzt werden darf.

Ferner lässt sich in manchen Fällen ein wesentlicher Vortheil dadurch erzielen, dass man dem angezogenen Punkte U eine specielle Lage zuweist, nämlich eine oder mehrere der Grössen a, b und c gleich Null nimmt. Die unter C behandelte Ableitung der Anziehungscomponenten ist dann aber (selbstverständlich) nicht mehr möglich, weil sie allgemeine a, b und c voraussetzt.

II. Was unter C für die Gesammtanziehungen behandelt wurde, kann man auch auf die Elemente derselben anwenden. Die durch 10—12 ausgedrückten Componenten des durch Nr. 8 angegebenen Anziehungselementes, folgen nämlich, wie man leicht erkennt, aus dem „Potential“

39) $$\frac{dm}{u}$$

$\left(\text{d. i. } \frac{\text{Masse}}{\text{Entfernung}}\right)$ desselben ebenfalls durch partielle Differentiation nach a, b und c.

III. Unter „Masse" ist im Vorhergehenden nur Dasjenige verstanden, was die Anziehung veranlasst, also die Anziehungsursache. Es können mithin die Ergebnisse leicht auf andere Gebiete (Magnetismus, Elektricität u. s. w.) übertragen werden, wobei das für Abstossungen Geltende sich durch Umkehrung der Vorzeichen ergiebt.

IV. Wenn eine ebene Fläche durch eine punktförmige Lichtquelle Q beleuchtet wird, so darf man im Allgemeinen voraussetzen, dass die dem (unendlich kleinen) Elemente zukommende Lichtmenge dem Flächeninhalte des Elements und dem Sinus des Neigungswinkels direct, dem Quadrate der Entfernung aber umgekehrt proportional sei.

Es steht dann die Lichtmenge, welche die Fläche von dem Punkte Q empfängt, in sehr einfacher Beziehung zu der Anziehung, die Q, nach dem Newton'schen Gesetze, senkrecht zur Fläche von letzterer erleidet.

Man ermittele jene Beziehung und zeige, wie derartige Lichtmengenberechnungen auf die Untersuchung von Anziehungen zurückkommen. Auch wende man das Gefundene auf einen besonderen Fall an, etwa auf die Beleuchtung, welche eine Kreisfläche durch einen in ihrer Achse befindlichen Punkt erfährt (was zu § 34, A, in enger Beziehung steht.)

V. Aus den Componenten A, B und C (Nr. 13 – 18 oder 24—26) folgt die Resultirende nach der Gleichung

40) $$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

und die Winkel λ, μ, ν, unter welchen sie gegen die Achsen der x, y und z geneigt ist, sind bestimmt durch

41) $$\cos\lambda = \frac{A}{R},$$

42) $$\cos\mu = \frac{B}{R},$$

43) $$\cos\nu = \frac{C}{R}.$$

Diese 4 Gleichungen (40—43) bestimmen die Anziehung nach Grösse und Richtung vollständig und sie kommen, wie gezeigt worden ist, alle vier zurück auf das „Potential". Es bedarf also für Untersuchungen, die Anziehungen, Abstossungen u. s. w. betreffen, nur der Kenntniss dieses Letztgenannten.

VI. Näheres über Anziehungen und das Potential findet man in einer sehr umfangreichen Literatur, aus welcher hier nur folgende Werke, deren Titel im „Literaturverzeichniss" genauer angegeben sind, herausgegriffen werden mögen: Clausius, die Potentialfunction. — Duhamel, analytische Mechanik (Bd. 1, Buch I, Cap. 13). — Exner, Vorlesungen über Elektricität; (§ 13). — Gauss, allgemeine Lehrsätze u. s. w. — Green, application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. — Günther, Geophysik; Bd. 1, S. 165 und 166. (Beziehungen des Potentials zur Erdkunde.) — Helmert, Theorien, Bd. 2. — Hirst, on equally attracting bodies. — Schell, Theorie der Bewegung u. s. w., 4. Theil, Cap. IX (wo auch, am Schlusse, eine sehr ausführliche Literaturangabe). — Schellbach, welche Gestalt u. s. w. — Schlömilch, der Attractionscalcül. — Voigt, elementare Mechanik; 1889; (Seite 258—278). — Weber, Elektrodynamik; 1889. — Wiedemann, die Lehre von der Elektricität. — Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 4, S. 119—122, 197—218 (und an anderen Stellen der 3. Auflage des genannten Bandes).

Capitel III.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG.

---

§ 36. Gleichgewichtslinien für bewegliche Punkte.

A.

I. Auf einer starren (unbiegsamen) Bahn LM, welche sich mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit w um eine senkrechte Achse OY (Fig. 61) dreht, ist ein Punkt P, der die Masse 1 hat und jene Bahn (Führung) nicht verlassen kann, beweglich. Er unterliegt nur der Centrifugalkraft und der Schwere.

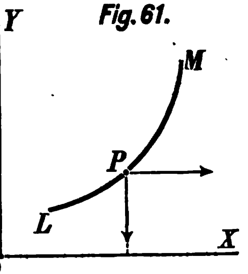


Fig. 61.

Es soll (bezogen auf das durch die Figur angegebene Coordinatensystem) die Gleichung derjenigen Linie berechnet werden, nach welcher jene Bahn LM gekrümmt sein muss, damit P an allen Stellen derselben sich im Gleichgewichte befinde. Art und Lage der Curve sind gehörig anzugeben. Auch soll man ermitteln, wie jene Gleichung lautet, wenn ein Punkt der Bahn vorgeschrieben ist, etwa durch die Coordinaten $x = a$ und $y = b$.

Lösung. Die Resultirende der wirkenden Kräfte muss überall senkrecht zur Tangente der gesuchten Gleichgewichtslinie sein. Hieraus folgt (man vergleiche, wenn nöthig, Thl. I, § 32), dass Letztere die Differentialgleichung

$$1)\qquad g\frac{dy}{dx} - w^2 x = 0$$

hat.

Integration von Nr. 1 giebt:

$$2)\qquad x^2 = \frac{2g}{w^2}(y + c),$$

wobei c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Die Bahn muss also nach einer gemeinen Parabel gekrümmt sein, deren Halbparameter gleich $\frac{g}{w^2}$ ist, deren Achse mit der Drehachse OY zusammenfällt und deren Scheitel um die beliebige Strecke c von O absteht.

Wurde vorgeschrieben, dass die gesuchte Gleichgewichtslinie durch den Punkt gehe, dessen Coordinaten a und b sind, so lautet, aus nahe liegendem Grunde, die Parabelgleichung:

$$3)\qquad x^2 - a^2 = \frac{2g}{w^2}(y - b).$$

Der Scheitel hat also dann von O den Abstand $\frac{a^2 w^2}{2g} - b$.

II. In naher Beziehung zu dem unter I Vorhergehenden steht, dass die Niveauflächen homogener rotirender Flüssigkeiten Umdrehungsparaboloide sind. Näheres hierüber im § 40 unter A. Ferner: Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, S. 287—289 der 4. Auflage. — Neumann, theoretische Physik, S. 119 und 120.

B.

Es möge ferner vorausgesetzt werden, dass der mit der Masse 1 versehene Punkt P (Fig. 61) im Sinne der positiven x einer Kraft U unterliege, welche dem Abstande von OY proportional ist und für die Einheit desselben den positiven, constanten Werth A hat, ferner im Sinne der positiven y einer Kraft V, die proportional der Entfernung von OX derartig wächst, dass ihr für die Einheit der letzteren der constante, positive Betrag B zukommt.

Man soll, wie vorher, die Gleichung, Art und Lage derjenigen starren Bahn LM berechnen, auf welcher P unter der Einwirkung jener beiden Kräfte überall im Gleichgewichte ist.

Lösung. Aus der Bedingung, dass die Resultante senkrecht zur Tangente sein muss, folgt die Nothwendigkeit des Erfülltseins der Differentialgleichung

4) $$Ax + By\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ihre Integration liefert, wenn mit C eine beliebige Constante bezeichnet wird,

5) $$Ax^2 + By^2 = C.$$

Die gesuchte Gleichgewichtslinie LM ist also eine Ellipse, deren Achsenrichtungen mit OX und OY zusammenfallen. Die Halbachsenlängen a und b verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den vorgeschriebenen Grössen A und B, sind aber sonst willkürlich (so dass unendlich viele Ellipsen den gestellten Anforderungen genügen).

Anmerkung. Es ist sehr leicht, die Richtigkeit der unter α—γ folgenden Sätze nachzuweisen:

α) Soll die Bahn die besondere Bedingung erfüllen, durch denjenigen Punkt zu gehen, welcher die Coordinaten $x = m$ und $y = n$ hat, so kommen den Halbachsen die Längen

6) $$a = \sqrt{\frac{Am^2 + Bn^2}{A}},$$

und

7) $$b = \sqrt{\frac{Am^2 + Bn^2}{B}}$$

zu.

β) Der Normaldruck, welchen (im allgemeinen Falle) LM erleidet, hat den Werth

8) $$N = \sqrt{BC + A(A - B)x^2}$$

(dessen grösste und kleinste Beträge man sogleich erkennt).

γ) Für $B = A$ ist dieser Druck unveränderlich, nämlich

9) $$N = \sqrt{AC}.$$

C.

Endlich soll angenommen werden, dass die den Punkt P im Sinne der positiven Abscissen beeinflussende Kraft U dem Abstande von OY, also dem x, umgekehrt proportional sei und dass die im Sinne der positiven Ordinaten wirkende Kraft V ebenso abhänge von dem y. Für die Einheit der Abstände mögen beide die Intensität K haben.

Gleichung, Art und Lage derjenigen starren Curve, auf welcher P dann überall im Gleichgewichte ist, sollen wieder ermittelt. werden.

Lösung. Auf dem unter A benutzten Wege ergiebt sich

$$10)\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=0$$

als Differentialgleichung der gesuchten Gleichgewichtslinie.

Durch Integration folgt hieraus:

$$11)\qquad xy=c^2,$$

wobei c^2 eine willkürliche Constante bedeutet.

Nr. 11 lehrt, dass die aufzufindende Bahn eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten mit den Achsen des Coordinatensystems zusammenfallen und deren Halbachsenlänge beliebig genommen werden darf.

Anmerkung. Auch hier möge empfohlen sein, das unter α und β Folgende abzuleiten:

α) Wurde vorgeschrieben, dass die Bahn durch einen besonderen Punkt, welcher die Coordinaten m und n hat, gehe, so ist

$$12)\qquad a=\sqrt{2mn}$$

die Halbachsenlänge.

β) Der von der Führung auszuhaltende Normaldruck N hängt nach der Gleichung

$$13)\qquad N=\frac{K}{xy}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{K}{c^2}r$$

von den Coordinaten der betreffenden Stelle, bezüglich von ihrem Leitstrahl r, ab. Den kleinsten Werth, nämlich $\frac{\sqrt{2}}{c}K$, hat jener Druck im Scheitel der Hyperbel.

§ 37. Geschwindigkeiten, verursacht durch Anziehungen.

A.

Die Beziehungen, welche bei der geradlinigen Bewegung eines Punktes P, von der Masse 1, zwischen der Geschwindigkeit v, dem zurückgelegten Wege s, der verflossenen Zeit t und der beschleunigenden Kraft p bestehen, lauten bekanntlich:

1) $$v = \frac{ds}{dt},$$

2) $$p = \frac{dv}{dt},$$

3) $$p = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

4) $$p = \frac{v\,dv}{ds}.$$

Es wurden diese „Grundformeln der geradlinigen Bewegung" im § 12 des ersten Theiles dieses Werkes abgeleitet und dann mittelst derselben (im § 15) die entsprechenden Formeln für die krummlinige Bewegung eines materiellen Punktes gewonnen. Im Nachfolgenden sollen jene Formeln (der §§ 12 und 15 des I. Theiles) als bekannt vorausgesetzt werden.

Zunächst mögen, unter B—E, einige Aufgaben zur Behandlung gelangen, bei denen nur die Berechnung von Geschwindigkeiten gefordert ist. Die §§ 51—61 werden Erweiterungen darbieten.

B.

Die im § 20 unter B genannte Gerade AB (Fig. 26 auf S. 81) soll den Punkt P in der dort festgesetzten Weise, also nach dem Newton'schen Gesetze, anziehen. Es möge dabei jener Punkt frei beweglich sein, nur jener Anziehung unterliegen und sich zu der Zeit Null in dem Abstande a (von B) in Ruhe befunden haben. Dann wird er zu der Zeit t noch um eine Strecke, die wir y nennen, von B abstehen und eine gewisse Geschwindigkeit v haben, die offenbar von a, b, y, k, q und ε abhängen muss.

Es soll diese Geschwindigkeit berechnet werden, ausgedrückt durch die letztgenannten Grössen (welche selbstverständlich die in dem § 20 unter B genannte Bedeutung haben).

Man soll ferner diejenige Geschwindigkeit v_1 herleiten, mit welcher P die Halbirungsstelle des anfänglichen Abstandes a durchläuft; endlich auch die, v_2, mit der er in B eintrifft.

Lösung. Die Anziehung, welche die Gerade AB auf den Punkt P ausübt, wenn letzterer um y von B absteht, hat (gemäss § 20, Gleichung 7) den Werth

5)
$$Y = \frac{km}{y(b+y)},$$
wobei

6)
$$m = bq\varepsilon$$
ist. Nr. 5 bildet in dem vorliegenden Falle die beschleunigende Kraft.

Andererseits hat man für Letztere allgemein (laut 4 und wegen $y = a - s$):

7)
$$p = -\frac{v\,dv}{dy}.$$

Das giebt

8)
$$-\frac{v\,dv}{dy} = \frac{km}{y(b+y)}$$
als Differentialgleichung der Bewegung.

Hieraus folgt zunächst:
$$-\frac{1}{2}v^2 = km\int\frac{dy}{y(b+y)}.$$

Ferner, durch Spaltung in Partialbrüche,

9)
$$-\frac{1}{2}v^2 = \frac{km}{b}\,l\,\frac{y}{b+y} + \text{Const.}$$

Wird nun noch die Bedingung, dass v gleich Null sein muss, wenn y gleich a ist, eingeführt, so ergiebt sich:

10)
$$v = \sqrt{2kq\varepsilon\,l\frac{a(b+y)}{(a+b)y}}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher P die Halbirungsstelle des anfänglichen Abstandes durchläuft, hat hiernach den Werth

11)
$$v_1 = \sqrt{2kq\varepsilon\,l\frac{a+2b}{a+b}};$$
diejenige, mit der er in B anlangt, ist unendlich gross.

C.

Der frei bewegliche Punkt P (von der Masse 1) möge sich zu der Zeit Null im Abstande c senkrecht über dem Centrum C einer materiellen Kreisfläche, welche den Halbmesser a, die Dicke δ und die Dichtigkeit ε hat, in Ruhe befinden. Es soll nur die Anziehung dieser Fläche auf jenen Punkt wirken und zwar nach dem Newton'schen Gesetze.

Man verlangt, dass unter Benutzung des § 34 die Berechnung derjenigen Geschwindigkeit v erfolge, welche der Punkt P erworben hat, wenn er, durch jene Anziehung in Bewegung gebracht, sich dem Centrum. C bis auf die Entfernung y näherte.

Lösung. Im Abstande y wird P mit einer durch die Gleichung 3 des § 34 bestimmten Stärke angezogen. Das giebt, gemäss Nr. 7,

$$12)\qquad -\frac{v\,dv}{dy} = 2\pi k \delta \varepsilon \left(1 - \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

als Differentialgleichung der stattfindenden Bewegung. Setzt man, zur Abkürzung,

$$13)\qquad 4\pi k \delta \varepsilon = K^2,$$

integrirt und berücksichtigt, dass v gleich Null sein muss, wenn y gleich c ist, so folgt

$$14)\qquad v = K\sqrt{(\sqrt{a^2+y^2}-y) - (\sqrt{a^2+c^2}-c)}.$$

Wird mit s der zurückgelegte Weg (von der Ruhelage aus gezählt) bezeichnet, ferner mit u der (veränderliche) Abstand des sich bewegenden Punktes vom Kreisumfange, endlich mit b der ursprüngliche Werth jenes Abstandes, so nimmt der unter 14 genannte Betrag der gesuchten Geschwindigkeit die einfache Form

$$15)\qquad v = K\sqrt{s+u-b}$$

an.

D.

Es soll ferner angenommen werden, dass der Punkt P (Masse 1) gleichzeitig einer Anziehung und einem Mittelwiderstande unterliege. Ersterer möge proportional sein dem Abstande x von einem festen Centrum C und dabei für die Einheit von x gleich α (was z. B. bei Schwingungen*) elastischer Körper vorkommt; ferner bei Bewegungen in centralen Kugelbohrungen, etwa in Erdschächten, wenn das Newton'sche Gesetz gilt)**). Von dem Widerstande soll vorausgesetzt werden, dass er dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional sei und für $v = 1$ die Intensität β habe. Anfänglich möge sich P in dem Abstande c von C in Ruhe befunden haben.

*) § 53.
**) § 34, Gleichung 44.

Man soll die Geschwindigkeit v berechnen, ausgedrückt durch α, β und x.

Lösung. Die Differentialgleichung der Bewegung lautet:

$$16)\qquad -\frac{v\,dv}{dx} = \alpha x - \beta v^2,$$

hat also die Form

$$17)\qquad \frac{dv}{dx} - \beta v + \frac{\alpha x}{v} = 0.$$

Ihre Integration*) giebt:

$$18)\qquad v = \frac{e^{\beta x}}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{2\beta x + 1}{e^{2\beta x}} - \frac{2\beta c + 1}{e^{2\beta c}}\right\}},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$19)\qquad v = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha\left\{(2\beta x + 1) - (2\beta c + 1)\,e^{2\beta(x-c)}\right\}}\,.$$

Dabei bezeichnet e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und es ist gehörig in Rechnung gezogen, dass v zu Null werden muss, wenn x gleich c wird.

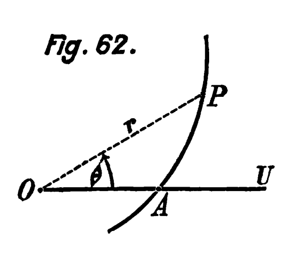
Für $\beta = 0$, also beim Verschwinden des Mittelwiderstandes, giebt Nr. 18:

$$20)\qquad v = \sqrt{\alpha\,(c^2 - x^2)}.$$

Näheres hierüber im § 52 des ersten Theiles dieses Werkes.

E.

Endlich möge die Aufgabe gestellt sein, die Bahngeschwindigkeit einer Centralbewegung zu berechnen und zwar unter folgenden Voraussetzungen: Der Punkt P (Masse 1) wird von dem festen Centrum O (Fig. 62) proportional der n^{ten} Potenz der Entfernung OP, welche r heissen möge, derartig angezogen, dass für $r = 1$ diese Anziehung gleich k ist. In dem Abstande $OA = a$ hat P, in der Richtung der Bahntangente, die Geschwindigkeit c. Verlangt wird (ausgedrückt durch a, c, k, n und r) diejenige im Sinne der Bahnrichtung vorliegende Geschwindigkeit v, welche in dem allgemeinen Abstande OP herrscht.



*) Man sehe, wenn nöthig: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 105 der 5. Auflage.

Auch soll das Ergebniss auf den besonderen Fall des Newton'schen Gesetzes, also auf den der Planetenbewegung, angewendet werden.

Lösung. Es wirkt in der Richtung PO die beschleunigende Kraft

21) $$R = k r^n.$$

Nimmt man OU als positive Seite der X-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen positive Y-Achse von O aus nach oben liegen möge, so ist

22) $$X = -k x r^{n-1}$$

die beschleunigende Kraft im Sinne der positiven x; ferner

23) $$Y = -k y r^{n-1}$$

diejenige im Sinne der positiven y.

Bezeichnet man also mit v_x und v_y die im Sinne jener Achsen herrschenden Geschwindigkeiten, ferner mit t die verflossene Zeit, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung, gemäss Th. I, § 15, Nr. 9 und 10:

24) $$\frac{d v_x}{dt} = -k x r^{n-1}$$

und

25) $$\frac{d v_y}{dt} = -k y r^{n-1}.$$

Werden nun die Beziehungen

26) $$v^2 = v_x^2 + v_y^2, \text{ also } v \frac{dv}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt},$$

(Nr. 3 und 20 des obigen § 15) und

27) $$r^2 = x^2 + y^2, \text{ daher } r\,dr = x\,dx + y\,dy$$

für Nr. 24 und 25 gehörig benutzt, so geben die beiden letztgenannten Differentialgleichungen die neue:

28) $$v\,dv = -k r^n\,dr.\text{*)}$$

Bei der Integration sind die Fälle: $n \gtrless -1$ und $n = -1$ zu unterscheiden.

Für $n \gtrless -1$ ergiebt sich, wenn gehörig beachtet wird, dass $v = c$ sein muss, falls $r = a$ ist:

*) Hinsichtlich anderer Herleitung dieser Gleichung Nr. 28 sehe man: Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Theil II, Fussnote auf S. 74 der 2. Auflage.

29) $$v = \sqrt{c^2 + \frac{2k}{n+1}(a^{n+1} - r^{n+1})};$$

hingegen erhält man für $n = -1$:

30) $$v = \sqrt{c^2 + 2kl\frac{a}{r}}.$$

Erfolgt die Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze, so hat die Geschwindigkeit den Werth

31) $$v = \sqrt{c^2 - 2k\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)}.$$

§ 38. Elastische Nachwirkung.

A.

Die Veränderungen, welche ein Körper zufolge seiner Elasticität erleidet, wenn äussere Kräfte auf ihn wirken, oder zu wirken aufhören, treten nicht augenblicklich ein. Dehnt man z. B. einen Seidenfaden durch Anbringung eines Gewichtes, so folgen, bei fortdauernder Wirkung des letzteren, der sogleich sich zeigenden Verlängerung noch viele Stunden lang weitere Längenzunahmen. Oder dreht man einen Draht und lässt dann diese Drehung aufhören, so kehrt er nicht sogleich in seine frühere Gleichgewichtslage zurück, behält vielmehr eine nur langsam sich verlierende Torsion bei.

Nach F. Kohlrausch*) hängt die Geschwindigkeit v, mit welcher ein Molekül des Körpers sich der durch die wirkenden Kräfte bedingten neuen Gleichgewichtslage nähert, ab

a) von derjenigen Zeit t, welche seit dem Beginn des Wirkens jener Kräfte verstrich,

b) von dem Abstande x, den das Molekül von der Gleichgewichtslage hat;

und zwar ist jene Geschwindigkeit letzterem Abstande direct proportional, der n^{ten} Potenz der Zeit hingegen umgekehrt proportional; also

1) $$v = \alpha \frac{x}{t^n},$$

wobei α und n positive constante Grössen bezeichnen.

Da aber bekanntlich (siehe Theil I, § 12, Nr. 3):

2) $$v = -\frac{dx}{dt}$$

*) Annalen der Physik u. Chemie, Band 128, S. 9 und 418.

ist, so wird die elastische Nachwirkung durch die Differentialgleichung:

3) $$\frac{dx}{dt} = -\alpha \frac{x}{t^n}$$

ausgedrückt.

Man soll nun, von Nr. 3 ausgehend, den Abstand x, welchen das Molekül zu der Zeit t von der Gleichgewichtslage hat, berechnen und zwar

I. für den Fall, dass n kleiner als 1,

II. für den, dass es gleich 1 ist.

Die Constante der Integration möge in beiden Fällen ableitbar sein aus dem Umstande, dass der für die Zeit t_1 vorliegende Abstand x_1 irgendwie bekannt oder messbar sei. Man hat also im ersten Falle den gesuchten Abstand x auszudrücken durch t, x_1, t_1, α und n, im zweiten durch t, x_1, t_1 und α.

Lösung. Für $n < 1$ giebt die Gleichung Nr. 3:

4) $$x = x_1 e^{\frac{\alpha}{1-n}(t_1^{1-n} - t^{1-n})},$$

wobei e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet und die Integrationsconstante in der vorher angegebenen Weise bestimmt worden ist.

Setzt man, zur Abkürzung,

5) $$\frac{\alpha}{1-n} = a,$$

6) $$x_1 e^{\frac{\alpha}{1-n} t_1^{1-n}} = b,$$

7) $$1 - n = m,$$

so nimmt Nr. 4 die einfache Form

8) $$x = b e^{-a t^m}$$

an.

Für $n = 1$ geht die Differentialgleichung 3 über in

9) $$\frac{dx}{dt} = -\alpha \frac{x}{t} \text{*)};$$

mithin giebt die Integration:

10) $$x = x_1 \left(\frac{t_1}{t}\right)^\alpha,$$

oder

11) $$x t^\alpha = x_1 t_1^\alpha.$$

*) Man vergleiche § 42; besonders die Gleichung Nr. 1 desselben.

Wird das constante Produkt

12) $$x_1 t_1^\alpha = c$$

gesetzt, so hat man

13) $$x = c t^{-\alpha},$$

oder

14) $$x t^\alpha = c.$$

Nr. 8 und 13 bieten die Ergebnisse in der einfachsten Form.

B.

Erst für $t = \infty$ liefern die letztgenannten Gleichungen

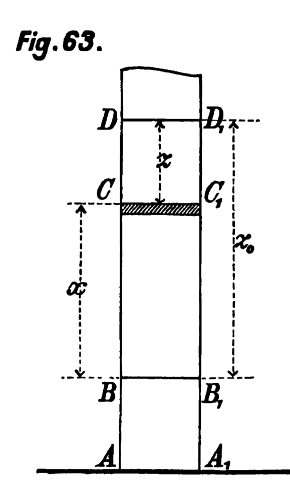
15) $$x = 0.$$

Es ist also, nach der obigen Theorie, für eine endliche Zeit stets ein Abstand von der Gleichgewichtslage vorhanden, wenn auch, für sehr grosse Werthe von t ein sehr kleiner. Dies stimmt mit den Versuchen gut überein.

Näheres über die sehr interessante elastische Nachwirkung (insbesondere über die aus den Beobachtungen entnehmbaren Coefficienten der Gleichungen 8 und 13): 1) Annalen der Physik und Chemie, Bd. 128, S. 1—20, 207—227, 399—419. (Abhandlung von F. Kohlrausch.) — 2) Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, § 54 der 4. Auflage (wo man auch weitere Literaturangaben findet).

§ 39. Luftdruck. Barometrisches Höhenmessen.

Fig. 63.



A.

Für eine über der Grundfläche $A A_1$ (Fig. 63) stehende Luftsäule sei der durch das Gewicht der Luft in irgend einer Horizontalschicht $B B_1$ auf die Flächeneinheit erzeugte Druck, welcher p_0 heissen soll, bekannt.

Es möge jene Stelle $B B_1$ in der Tiefe z_0 unter $D D_1$, von wo aus die Tiefen gezählt werden, liegen. Man soll

I. den Druck, p, berechnen, welcher in der Höhe x über $B B_1$, also bei $C C_1$, für die Flächen-

einheit vorliegt, soll mithin p als Function von x herleiten. Dabei möge angenommen werden, dass die Temperatur der Luftsäule überall dieselbe sei, bezüglich der Dichtigkeit das Mariotte'sche Gesetz herrsche, und der Druck p nur von der Schwere der Luft erzeugt werde. Endlich möge, unter Festhaltung dieser Annahmen,

II. gezeigt werden, wie sich das Ergebniss für das barometrische Höhenmessen benutzen lässt, wie nämlich die Höhe x aus den bei BB_1 und CC_1 beobachteten Barometerständen, b_0 und b_1, abgeleitet werden kann.

Lösung. I. Wächst die Tiefe z, in welcher CC_1 unter DD_1 liegt, um dz, so nimmt p um dp zu; also ist dp gleich dem Gewichte derjenigen (unendlich kleinen) Luftsäule, welche die Höhe dz und die Grundfläche 1 hat; daher

1) $$dp = \gamma\, dz,$$

wobei γ das Gewicht der Volumeneinheit bedeutet (und innerhalb dz als unveränderlich anzusehen ist).

Nach dem Mariotte'schen Gesetze (Theil I, § 25) ist aber bekanntlich das Volumen der Luft umgekehrt proportional dem Drucke, also das Gewicht der Volumeneinheit dem Drucke direct proportional, daher:

2) $$\gamma = kp,$$

wobei k einen Erfahrungscoefficienten (constante Zahl) bedeutet.

Aus Nr. 1 und 2 folgt, wenn man integrirt und gehörig beachtet, dass p gleich p_0 sein muss, wenn z gleich z_0 ist,

3) $$p = p_0 e^{-kx},$$

wobei e, wie immer, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Es nehmen, laut Nr. 3, die Luftdrücke nach einer geometrischen Reihe ab, wenn die Höhen nach einer arithmetischen Reihe wachsen*); für

$$x = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots\ldots\ldots$$

ist

$$p = p_0, \; p_0 e^{-k}, \; p_0 e^{-2k}, \; p_0 e^{-3k}, \ldots\ldots\ldots,$$

*) Halley'scher Satz.

II. Aus Nr. 3 folgt:

$$4)\qquad x = \frac{1}{k}\, l\, \frac{p_0}{p};$$

oder, wenn K eine neue Constante bedeutet,

$$5)\qquad x = K \log \frac{p_0}{p}.\ ^{*)}$$

Da aber die Luftdrücke p_0 und p sich wie die zugehörigen Barometerstände b_0 und b verhalten, so ergiebt sich:

$$6)\qquad x = K \log \frac{b_0}{b} = K(\log b_0 - \log b).$$

Der Höhenunterschied (x) zweier Beobachtungsorte (CC_1 und BB_1) ist also proportional dem Logarithmus des Verhältnisses der (gleichzeitigen) Barometerstände.

B.

Das Vorstehende bildet die Grundlage der Theorie des barometrischen Höhenmessens. Doch kommt für Letzteres, ausser der Ermittelung des Coefficienten K, noch manches Andere in Betracht, nämlich die Berücksichtigung der Temperatur der Luft und des Quecksilbers, die Veränderlichkeit der Schwere, die Centrifugalkraft, also die geographische Breite, u.s.w. Es fallen demgemäss die wirklich zur Anwendung kommenden „Barometerformeln" etwas verwickelt aus. Näheres hierüber: 1) Bauernfeind, Vermessungskunde, Bd. 1, § 373—378 der 3. Aufl. (Ferner die im „Literaturverzeichnisse" genannte, 1862 erschienene, Schrift desselben Verfassers.) — 2) Günther, Geophysik, Bd. 2, S. 105—110 (§ 4), wo auch sehr ausführliche Angaben bezüglich der Geschichte und Literatur des barometrischen Höhenmessens. — 3) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 1, § 151 der 2. Auflage. — 4) Kohlrausch, praktische Physik; S. 64—67 (§ 21) der 6. Auflage. — 5) Rühlmann, die barometrischen Höhenmessungen; 1870. (Enthält, neben vielen sehr werthvollen grundlegenden Untersuchungen, eine Zusammenstellung von 23 Barometerformeln und 139 dieselben betreffenden

*) Mit l sind hier (und im Folgenden) die natürlichen, mit log die künstlichen (gemeinen) Logarithmen bezeichnet.

Arbeiten, reichend von 1658 (Pascal) bis 1870.) — 6) Wolf, Handbuch der Mathematik; Bd. 1, § 275.

Für die Halley'sche Barometerformel (Gl. 6) ist die Constante $K = 18400$ (abgerundet), wenn x in Metern ausgedrückt wird. Man unterlasse nicht, ein Zahlenbeispiel durchzuführen, etwa annehmend, dass die Barometerstände 764, bezüglich 718 Millimeter gewesen seien.

§ 40. Druck in Flüssigkeiten bei Drehung um eine senkrechte Achse. Niveauflächen hierbei.

A.

Es sei Q der allgemeine Punkt einer homogenen Flüssigkeitsmasse. Seine auf ein rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten mögen x, y und z heissen.

Ferner soll p den für die Flächeneinheit geltenden Druck bezeichnen, welcher an der Stelle Q in der Flüssigkeitsmasse herrscht.

Dann ist, was aus der Physik oder Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden möge, der Druck

$$1)\qquad p = \frac{\gamma}{g}\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

wobei X, Y und Z die nach den positiven Achsenrichtungen thätigen Componenten derjenigen beschleunigenden Kraft sind, welche auf den Punkt Q wirkt, γ das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit bezeichnet und g die Beschleunigung der Schwere.

Ferner kommt dann den Niveauflächen — also denjenigen Flächen, für welche die resultirende Kraft überall senkrecht zum Flächenelemente steht und der Druck in allen Punkten derselbe ist — die Differentialgleichung

$$2)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

zu.*)

Es sollen nun die Gleichungen 1 und 2 auf eine Flüssigkeitsmasse angewendet werden, die sich, unter dem gewöhnlichen Atmosphärendrucke p_0, in einem kreiscylindrischen Gefässe (vom

*) Bezüglich der Ableitung von Nr. 1 und 2 sehe man, wenn nöthig: Duhamel, analyt. Mechanik, Bd. 2, S. 182—185. — Neumann, theoret. Physik, S. 129—130. — Weisbach, theoret. Mechanik, S. 852—854 der 5. Auflage.

Durchmesser $2a$) befindet, welches mit der unveränderlichen Winkelgeschwindigkeit w um die feste senkrecht stehende Achse MN (Fig. 14 auf Seite 50) sich dreht. Bekannt möge sein, dass die Flüssigkeit ehe die Drehung begann in der Höhe $DH = h$ über dem Boden AD des Gefässes stand.

Man soll berechnen:

I. Gleichung, Art und Lage der Niveauflächen; erstere, bezogen auf ein günstig gewähltes Coordinatensystem, in der Form

$$z = f(x, y);$$

II. Dasselbe für die freie Oberfläche;

III. den in der Flüssigkeit herrschenden Druck p und zwar
   α) als Function von x, y und z,
   β) als solche von r und z, wobei r den senkrechten Abstand des allgemeinen Punktes von der Drehachse bezeichnet.

Lösung. I. Wir nehmen den Punkt M (Fig. 14) als Coordinatenanfang, wählen MD zur Richtung der positiven x, MN zu der der positiven z, denken uns also die positive Y-Achse senkrecht zu DMN durch M gehend.

Dann ist, weil Centrifugalkraft und Schwere wirken,

3) $$X = w^2 x,$$

4) $$Y = w^2 y,$$

5) $$Z = -g.$$

Die Gleichung 2 lautet also:

6) $$w^2 x\,dx + w^2 y\,dy - g\,dz = 0.$$

Auf der linken Seite steht ein vollständiges Differential. Integrirt man, so ergiebt sich:

7) $$x^2 + y^2 = \frac{2g}{w^2}(z - C)$$

oder, was Dasselbe ist,

8) $$z = \frac{w^2}{2g}(x^2 + y^2) + C,$$

wobei C die Integrationsconstante bezeichnet.

Nr. 7 und 8 sprechen aus, dass die Niveauflächen Umdrehungsparaboloide sind, deren Rotationsachse mit der Z-Achse zusammenfällt.

Die Gleichung des in der XZ-Ebene liegenden Meridians jeder solchen Fläche lautet:

9) $$x^2 = \frac{2g}{w^2}(z - C).$$

Für $x = 0$ giebt das

10) $$z = C;$$

es liegt also der Scheitel des betreffenden Meridians in der Höhe C über M.

II. Um die Gleichung der freien Oberfläche zu erhalten, müssen wir für letztere die Constante C bestimmen, brauchen also drei zusammengehörige Werthe der drei Veränderlichen x, y und z. Diese lassen sich bezüglich des Punktes F angeben; für ihn ist nämlich

11) $$x = a, \; y = 0, \; z = h_1.$$

Letzteres kennt man laut § 15, Nr. 6, welcher Gleichung zufolge das paraboloidisch geformte Wasservolumen den Werth

12) $$V = \pi a^2 \frac{h_0 + h_1}{2}$$

hat, wobei h_0 die Strecke MS bezeichnet. Für den Ruhezustand gilt andererseits:

13) $$V = \pi a^2 h;$$

daher folgt aus 12 und 13:

14) $$h_1 = 2h - h_0.$$

Das hierin noch unbekannte h_0 ergiebt sich, wenn man Nr. 10 auf den Vertikalschnitt ESF der freien Oberfläche anwendet; für ihn geht die genannte Gleichung über in:

15) $$h_0 = C;$$

mithin ist

16) $$h_1 = 2h - C.$$

Führt man nun die in 11 und 16 stehenden Werthe ein in Nr. 7, so ergiebt sich:

17) $$C = h - \frac{a^2 w^2}{4g}.$$

Hiermit geht 7 über in

18) $$x^2 + y^2 = \frac{2g}{w^2}\left(z - h + \frac{a^2 w^2}{4g}\right),$$

oder

19) $$z = \frac{w^2}{2g}\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2} a^2\right) + h,$$

womit die Gleichung der freien Oberfläche der Flüssigkeit abgeleitet ist.

Der in der XZ-Ebene liegende Meridian dieser Fläche hat die Gleichung:

20) $$x^2 = \frac{2g}{w^2}\left(z - h + \frac{a^2 w^2}{4g}\right).$$

Für $x = 0$ giebt das:

$$z = h - \frac{a^2 w^2}{4g},$$

also

21) $$h_0 = h - \frac{a^2 w^2}{4g}.$$

Diese Scheitelhöhe h_0 ist nur so lange positiv und von Null verschieden, als

22) $$\frac{a^2 w^2}{4g} < h,$$

daher

23) $$w < \frac{1}{a}\sqrt{4gh}.$$

Mit Einführung der Umfangsgeschwindigkeit

24) $$v = a w$$

des Gefässes lässt sich das in der Form

25) $$v < \sqrt{4gh}$$

geben, was eine sehr einfache Beziehung zum freien Falle hat. Für

26) $$v = \sqrt{4gh}$$

wird h_0 zu Null; für noch grössere v wird es negativ.*)

III. Für den in der Flüssigkeit an dem Punkte xyz herrschenden Druck p hat man, laut Nr. 1, 3, 4 und 5:

27) $$p = \frac{\gamma}{g}\int (w^2 x\,dx + w^2 y\,dy - g\,dz).$$

---

*) Dies benutzt die Technik bei der Herstellung hohler Umdrehungskörper durch „Centrifugalguss". (Weisbach, theoretische Mechanik, S. 858 der 5. Auflage.)

Es ist also

28) $$p = \frac{\gamma w^2}{2g}(x^2 + y^2) - \gamma z + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, wenden wir die Gleichung 28 auf den Scheitel S an; für diesen ist

29) $$p = p_0, \; x = 0, \; y = 0, \; z = h_0 = C,$$

wobei man C laut Nr. 17 kennt.

Durch Einführung von 29 geht 28 über in:

30) $$p_0 = -\gamma C + \text{Const.}$$

Aus 28 und 30 aber folgt:

31) $$p = \gamma\left\{\frac{w^2}{2g}(x^2 + y^2) + C - z\right\} + p_0,$$

womit III$^{\alpha}$ Erledigung gefunden hat.

Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ ist Nr. 31 so viel wie

32) $$p = \gamma\left\{\frac{w^2}{2g}r^2 + C - z\right\} + p_0,$$

was das unter III$^{\beta}$ Verlangte enthält.

Den grössten Werth hat, gemäss Nr. 32, der Druck p da, wo r am grössten ist und z am kleinsten; also am Umfange der Bodenfläche des Gefässes. Für diese Stellen giebt die Gleichung 32:

33) $$p = \gamma\left\{\frac{a^2 w^2}{2g} + C\right\} + p_0,$$

oder, wenn Nr. 17 benutzt wird,

34) $$p = \gamma h_1 + p_0,$$

was leicht in Worte gefasst werden kann.

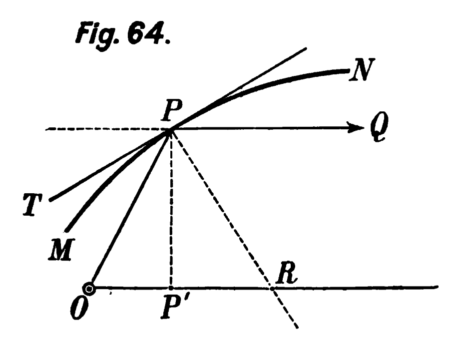
B.

Nahe verwandt Demjenigen, was unter A behandelt wurde, ist die Aufgabe: Die Gestalt der Erde unter der Voraussetzung zu berechnen, dass eine zum grössten Theile feste Kugel vorhanden sei, welche mit einer Flüssigkeit von verhältnissmässig geringer Tiefe bedeckt ist; ferner die Aufgabe: der Atmosphäre Gestalt, ebenfalls unter bestimmten einschränkenden Voraussetzungen, zu ermitteln. Es handelt sich bei der Lösung dieser Aufgaben wieder um Anwendung der Gleichungen 1 und 2. Man sehe darüber: Neumann, theoretische Physik, S. 120—123 und S. 168—171.

§ 41. Aufgaben aus der Optik.

A.

Auf eine krumme Linie MN (Fig. 64) fallen von einem festen Punkte O, welcher in der Ebene jener Curve liegt, Lichtstrahlen. Sie werden von der wie ein Spiegel wirkenden Linie nach dem bekannten Gesetze der Optik zurückgeworfen.



Man berechne, welcher Art die Curve MN sein muss, wenn die reflectirten Strahlen alle parallel einer vorgeschriebenen Richtung OR laufen sollen.

Lösung. Wir nehmen O als Ursprung des zu benutzenden rechtwinkligen Coordinatensystems, OR als Richtung der positiven Abscissen und legen die positive Y-Achse nach oben. Ferner bezeichnen wir, wie üblich, den Winkel ROP, welcher von dem Leitstrahl OP des allgemeinen Curvenpunktes P und von der positiven Abscissenachse gebildet wird, mit θ; endlich den, welchen die Tangente TP mit letztgenannter Achse einschliesst, durch τ.

Es besteht dann, weil der zurückgeworfene Strahl PQ parallel zu OR sein soll, die (der Fig. 64 leicht entnehmbare) Beziehung

$$1) \qquad \theta = 2\tau.$$

Sie liefert:

$$\tan\theta = \frac{2\tan\tau}{1 - \tan^2\tau},$$

mithin

$$2) \qquad \frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}$$

als Differentialgleichung der gesuchten Linie MN.

Benutzt man für diese homogene Gleichung die Substitution

3) $$\frac{y}{x} = t,$$

so ist einerseits

4) $$t = \frac{2y'}{1 - y'^2},$$

andererseits, aus Nr. 3 durch Differentiation folgend,

5) $$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t}.$$

Werden nun die aus 4 sich ergebenden Werthe von dt und $y' - t$ in 5 eingeführt, so erhält man die Differentialgleichung

6) $$\frac{dx}{x} = -2\frac{dy'}{y'(1 - y'^2)},$$

in welcher die Veränderlichen x und y' getrennt sind.

Durch Integration folgt aus Nr. 6:

7) $$\frac{x}{c} = \frac{1 - y'^2}{y'^2},$$

wobei c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Wird y' aus 2 und 7 eliminirt, so ergiebt sich als Gleichung der gesuchten krummen Linie MN:

8) $$y^2 = 4c(x + c).$$

Das lehrt Folgendes: Die für die zurückgeworfenen Lichtstrahlen gestellte Bedingung wird erfüllt durch jede gemeine Parabel, deren Brennpunkt mit dem leuchtenden Punkte O und deren Achse mit der vorgeschriebenen Richtung OR zusammenfällt. Es genügt der Aufgabe also eine Schaar von confocalen Parabeln. Oder, anders ausgedrückt: Alle Lichtstrahlen, welche auf einen nach einem Rotationsparaboloide geschliffenen Spiegel parallel zur Achse desselben fallen, werden im Brennpunkte vereint.

B.

Wenn von dem Punkte O (Fig. 65) auf die ebene Curve MN Lichtstrahlen fallen, so hängt die Stärke λ derjenigen Beleuchtung, die das an der Stelle P liegende Element empfängt, bekanntlich ab von der Intensität der Lichtquelle, von der Entfernung OP und von dem Winkel, welchen OP mit der Tangente

TP bildet. Wird Letzterer mit φ bezeichnet und *OP* mit r, so hat man:

$$1)\qquad \lambda = \frac{k \sin \varphi}{r^2},$$

wobei k die Lichtstärke ist, welche im Abstande 1 herrscht, falls die Strahlen senkrecht auftreffen.

Es soll berechnet werden, welcher Art die krumme Linie *MN* sein muss, wenn man für alle Elemente derselben gleiche Beleuchtungsstärke c haben will, nämlich diejenige, welche dem bei *A* befindlichen Elemente zukommt. Letzteres möge in dem Abstande $OA = r_0$ derartig liegen, dass die Strahlen senkrecht auftreffen.

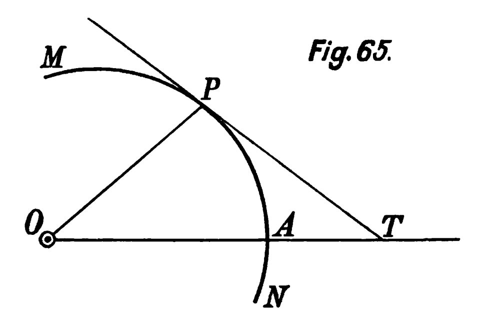


Fig. 65.

Lösung. Die Curve *MN* muss der Bedingung

$$2)\qquad \frac{k \sin \varphi}{r^2} = c$$

genügen.

Das thut zunächst der um O mit dem Halbmesser r_0 beschriebene Kreis, weil für ihn r und φ constant sind.

Da ferner

$$3)\qquad \sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

ist, wenn r' den Differentialquotienten $\frac{dr}{d\theta}$ bezeichnet und θ die Anomalie *AOP*, so genügt der obigen Bedingung auch diejenige krumme Linie *MN*, welche die Differentialgleichung

$$4)\qquad \frac{k}{r\sqrt{r^2 + r'^2}} = c,$$

oder

5) $$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{k^2 - c^2 r^4}{c^2 r^2}$$

hat.

Aus Nr. 5 folgt durch Integration:

6) $$r^2 = \frac{k}{c} \cos 2\theta,$$

wenn die in der Aufgabe bezüglich des bei A liegenden Curvenelementes gemachten Angaben gehörige Benutzung finden.

Die Gleichung 6 lehrt, dass die gestellte Bedingung des gleich starken Beleuchtetseins aller Linienelemente auch bei einer Lemniscate (Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel) erfüllt ist, nämlich bei derjenigen, deren Halbachse mit OA zusammenfällt.

§ 42. Die polytropische Curve der Gase.

Wenn die einem Gase zugeführte oder entzogene Wärmemenge der Temperaturänderung direct proportional ist, so kommt der Druckcurve die Differentialgleichung

1) $$\frac{dp}{p} + n\frac{dv}{v} = 0$$

zu.*) Dabei bedeutet p den Druck, v das Volumen (der Gewichtseinheit) und n eine Constante, welche von den für constanten Druck und für constantes Volumen vorhandenen specifischen Wärmen c_p und c_v abhängt nach der Gleichung

2) $$n = \frac{c - c_p}{c - c_v},$$

in welcher c eine beliebige, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet.**)

Es soll die Gleichung jener Drucklinie, der polytropischen Curve, aus Nr. 1 durch Integration abgeleitet werden, wobei für den Anfangszustand die Werthe p_1 und v_1 als bekannt gelten mögen.

Lösung. Ohne Schwierigkeit ergiebt sich, wie im § 38:

3) $$pv^n = C, \; C = p_1 v_1^n.$$

Anmerkung. Man unterlasse nicht, geometrische Eigenschaften der durch diese Gleichung gekennzeichneten polytropischen Curve aufzusuchen. Insbesondere

*) Man vergleiche: Elastische Nachwirkung (§ 38, Nr. 9).

**) Näheres: Zeuner, technische Thermodynamik, Bd. 1, S. 143.

beachte man die wichtigsten speciellen Fälle von n. (Näheres hierüber in dem vorher genannten Zeuner'schen Werke auf S. 147—152 des ersten Bandes.)

§ 43. Einiges aus der Lehre vom Magnetismus und der Elektricität.

A.

Der freie Magnetismus eines Stabes, dessen Dicke, verglichen mit der Länge, einen geringen Betrag hat, nimmt bekanntlich von den Enden aus nach der Indifferenzzone hin rasch ab und ist schon in geringer Entfernung von den ersteren sehr klein. Die wirkliche Vertheilung des Magnetismus kommt aber hiermit nicht zum Ausdruck. Es geht nämlich der freie Magnetismus hervor aus der Differenz der wirkenden Fluida. Damit nun (was die Beobachtung lehrt) Ersterer nach den Enden des Stabes zu die grössten Werthe habe, muss die magnetische Polarität der einzelnen Moleküle um so stärker sein, je näher sie der Stabmitte liegen. Es sei

k die halbe Länge des Stabes,
x der Abstand eines Querschnittes desselben von der Mitte,
z das magnetische Moment dieses Querschnittes,
A der Magnetismus des äussersten Querschnittes,
M ein positiver echter Bruch.

Dann besteht, nach van Rees, was aus der Physik als bekannt vorausgesetzt werden möge*), die Beziehung

$$1) \qquad -\frac{dz}{dx} = A\,M^k\,(M^{-x} - M^x).$$

Man soll durch Integration dieser Gleichung berechnen, welchen Werth das magnetische Moment z für einen Querschnitt hat, der sich im Abstande x von der Stabmitte befindet.

Auch soll das Ergebniss auf die Mitte des Stabes und auf seine Enden Anwendung finden.

*) Bezüglich der Gleichung Nr. 1 sehe man: Wüllner, Experimentalphysik, Band 4, § 2 und 9 der 3. Auflage. — Ferner: Annalen der Physik und Chemie, Band 70, S. 1—24 und Band 74, S. 213—230. Abhandlungen von van Rees.)

Lösung. Es folgt aus Nr. 1:

2) $$z = \frac{A\,M^k}{l\,M}\,(M^x + M^{-x}) + \text{Const.},$$

oder, was Dasselbe ist,

3) $$z = \frac{A\,M^k \log e}{\log M}\,(M^x + M^{-x}) + \text{Const.},$$

wobei e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Setzt man, zur Abkürzung,

4) $$\frac{A\,M^k}{l\,M} = \frac{A\,M^k \log e}{\log M} = -\,B$$

und nennt die Integrationsconstante C, so lauten die Gleichungen 2 und 3:

5) $$z = C - B\,(M^x + M^{-x}).$$

Hiernach hat z seinen grössten Werth, wenn das zweite Glied am kleinsten ist. Dieser Fall liegt vor, für $x = 0$, also in der Mitte des Stabes. Von hier, nach den Enden zu, nimmt z fortwährend ab.

Für jene Mitte hat man:

6) $$z = C - 2\,B.$$

An den Stabenden ist

7) $$z = C - B\,(M^k + M^{-k}).$$

B.

I. Der in Nr. 5 enthaltene Werth des magnetischen Momentes kann durch Benutzung einer gemeinen Kettenlinie zeichnerisch dargestellt werden.*) Man unterlasse nicht, Das durchzuführen.

II. Die Constanten B, C und M der Gleichung 5 ergeben sich für jeden Magnetstab aus Beobachtungen.

III. Näheres über die Vertheilung des Magnetismus im Innern der Magnete sehe man an denjenigen Stellen, welche die auf S. 192 stehende Fussnote nennt. Daselbst ist auch (Wüllner, S. 76) auf die von Poisson, Green, Neumann und Anderen herrührenden Untersuchungen, die sich auf Magnete anderer Formen beziehen, verwiesen. Ferner ist gezeigt, in welcher Weise die van Rees'sche Theorie auf die Arbeiten von Biot und Coulomb sich stützt.

---

*) Vergl. § 49, Nr. 20—22.

C.

Wer noch andere dem Gebiete des Magnetismus und der Elektricität angehörende leicht lösbare Aufgaben, welche Differentialgleichungen erster Ordnung betreffen, zu behandeln wünscht, der benutze das im „Literaturverzeichniss" genannte Wiedemann'sche Werk und zwar zunächst Bd. 1, S. 397, Bd. 3, S. 659—664 (§ 749—751), Bd. 4, Abt. I, S. 101—104. Die erstgenannte Stelle betrifft den Abfluss der Elektricität aus einem Conductor, welcher durch einen Draht mit der Erde verbunden ist; die zweite bezieht sich auf magnetische Curven (Linien, nach welchen sich Eisenfeilspähne anordnen, wenn sie, auf eine Glasplatte, oder ein Blatt Papier gestreut, der Einwirkung von Magneten ausgesetzt werden). Die letzgenannte Literatur (im 4. Bde.) betrifft die Intensität von Strömen.

§ 44. Das Nordenskjöld'sche Löslichkeitsgesetz.

Wenn sich die Temperatur t des mit einem Salze gesättigten Wassers um den unendlich kleinen Betrag dt ändert, so erlangt es dadurch — nach Nordenskjöld*) — die Fähigkeit, eine Salzmenge dS aufzulösen, welche (mindestens näherungsweise) dem Produkte $S.dt$ proportional ist, wobei S die bei der Temperatur t ohne Uebersättigung lösbare Menge bezeichnet. Es besteht also die Differentialgleichung

1) $$dS = bSdt.$$

Man soll, auf Grund dieser Gleichung, angeben:

I. welche Salzmenge S bei vorgeschriebener Wasserwärme t gelöst wird;

II. welcher Temperatur t das Wasser bedarf, um eine gegebene Salzmenge S zu lösen;

III. was für eine Bedeutung den in den Ergebnissen bei I und II auftretenden Constanten zukommt und wie sich die Werthe derselben durch Versuche (Messungen) herleiten lassen.

---

*) Annalen der Physik und Chemie, Reihe V, Bd. 16, S. 309 bis 317. — Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie, Bd. 1, S. 377.

Lösung. I. Die Gleichung 1 giebt durch Integration:

2) $$S = e^{a+bt},$$

wobei a eine Constante bezeichnet. Wird

3) $$e^a = k$$

gesetzt, so erlangt Nr. 2 die Form

4) $$S = k e^{bt}.$$

Durch 2 und 4 sind die gelösten Salzmengen S als Functionen der Temperatur t des Wassers bestimmt. Wachsen die t nach einer arithmetischen Reihe, so nehmen die S nach einer geometrischen zu; den Werthen

$$t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots.$$

entsprechen, laut Nr. 4, die Werthe

$$S = k,\ k e^b,\ k e^{2b},\ k e^{3b},\ \ldots\ldots.$$

II. Zur Aufnahme der vorgeschriebenen Salzmenge S bedarf das Lösungsmittel der Temperatur

5) $$t = \frac{1}{b}\, l\, \frac{S}{k} = \frac{l S - l k}{b} = \frac{1}{b}(l S - a).$$

III. Gemäss Nr. 4 bedeutet k den für $t = 0$ vorliegenden Werth von S. Ferner ist a der natürliche Logarithmus dieses Werthes k (laut 3). Endlich folgt aus der Gleichung 5:

6) $$b = \frac{1}{t}\, l\, \frac{S}{k},$$

was die dritte der in den Nrn. 2 und 4 auftretenden Constanten (den Proportionalitätsfactor der Gleichung 1) erklärt. Es ist

7) $$b = l S_{t=1} - l S_{t=0} = l \frac{S_{t=1}}{S_{t=0}}.$$

Seiner Bedeutung gemäss kann k durch Versuche erhalten werden, indem man diejenige Salzmenge misst, welche bei 0 Grad sich löst. Mit k hat man dann auch a. Ferner ist b, laut Gleichung 6, ermittelbar, indem für irgend eine Temperatur t ($\gtrless 0$) der zugehörige Werth von S bestimmt wird (nachdem vorher k abgeleitet wurde).

Man kann aber (und das ist vorzuziehen) die Unveränderlichen a und b der Gleichung 2, oder b und k der Gleichung 4, auch gleichzeitig ermitteln, indem man für irgend zwei Temperaturen, t_1 und t_2, die zugehörigen Salzmengen, S_1 und S_2, misst. Dann sind die für Nr. 2 erforderlichen Constanten a und b bestimmt durch die Gleichungen

8) $$a + b t_1 = l S_1, \quad a + b t_2 = l S_2;$$

ferner die für Nr. 4 nöthigen durch

9) $$k e^{b t_1} = S_1, \quad k e^{b t_2} = S_2$$

(was auf eines hinauskommt).

Selbstverständlich muss zur thatsächlichen Ermittelung der Werthe von a und b, oder b und k, eine für die Praxis hinreichend grosse Anzahl von Versuchen (Messungen) ausgeführt werden, deren unvermeidliche Fehler gehörig auszugleichen sind.

Anmerkung. Man berechne a, b und k aus Nr. 8 und 9.

Ferner beachte man Th. I, § 56 und § 71, B, wegen der Fehlerausgleichung; sodann: Th. I, § 24, wegen der geometrischen Darstellung des Gesetzes Nr. 2 und einer Erweiterung desselben.

Endlich möge die zwischen dem Halley'schen Satze (§ 39, A) und dem Nordenskjöld'schen Löslichkeitsgesetze stattfindende Beziehung nicht unbeachtet bleiben; desgleichen die, welche das letztgenannte zu der Verzinsung in unendlich kleinen Terminen oder zu dem im § 53 des I. Theiles behandelten organischen Wachsen hat.

§ 45. Chemische Vorgänge erster Ordnung.

A.

Die Zeit, welche ein chemischer Vorgang erfordert, hängt ab von der Natur der auf einander wirkenden Stoffe, von der in der Volumeneinheit enthaltenen Menge derselben (welche man nicht nach ihrem absoluten, sondern nach ihrem Molekulargewicht misst), von der Beweglichkeit der kleinsten Theile und von der Temperatur.

Wird bei einem Vorgange nur ein Stoff umgewandelt, so ist es am natürlichsten anzunehmen, dass die Reactionsgeschwindigkeit (Th. I, § 12; Th. II, § 11, D) unter sonst gleichen Umständen in jedem Augenblicke der Menge des wirkenden Stoffes proportional sei (also die Wirkung proportional der Ursache).

Bezeichnet man mit A die anfänglich in der Volumeneinheit vorhanden gewesene Menge jenes Stoffes, mit x diejenige, welche zu der Zeit t umgewandelt war, so ist die obige Annahme ausgedrückt durch die Differentialgleichung

1) $$\frac{dx}{dt} = K(A - x),$$

wobei K eine Constante bedeutet.*)

Es soll diese Gleichung integrirt, nämlich sowohl x als Function von t, wie auch t als Function von x berechnet werden und zwar unter der Voraussetzung, dass die Zeiten gezählt sind von dem Augenblicke an, in welchem der Vorgang beginnt, dass also

2) $$x_{t=0} = 0$$

ist. Auch soll man angeben, welchen Werth x nach unendlich langer Zeit hat.

Lösung. Aus Nr. 1 folgt durch Integration:

3) $$l\,\frac{A}{A-x} = Kt;$$

also

4) $$t = \frac{1}{K}\,l\,\frac{A}{A-x},$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet, so dass, statt 3, auch

5) $$\log\frac{A}{A-x} = 0{,}4343\,Kt$$

gesetzt werden darf, wenn auf 4 Decimalstellen abgerundet wird.

Nr. 3 giebt:

6) $$x = A(1 - e^{-Kt}).$$

Also hat man:

7) $$x_{t=\infty} = A.$$

Hiernach ist, rein theoretisch genommen, erst nach unendlich langer Zeit der Vorgang beendet. Jedoch kommt, gemäss Nr. 6, der Werth von x dem Betrage A bald so nahe, dass die Abweichung der wirklichen Messung sich entzieht. Man berechne, um sich hiervon zu überzeugen, die zu

$$x = \frac{99}{100}A,\quad \frac{999}{1000}A,\ \ldots\ldots$$

gehörenden Zeiten und vergleiche sie mit der, welche dem Werthe $x = \frac{1}{2}A$ entspricht, drücke sie mithin als Vielfache der letzt-

---

*) Die Geschwindigkeitslinie (vergl. § 4, A), deren Abscissen die Mengen des umgewandelten Stoffes und deren Ordinaten die zugehörigen Reactionsgeschwindigkeiten sind, ist, laut Gleichung 1, eine Gerade.

genannten Zeit aus. Hierbei ergiebt sich beispielsweise, dass die zu 0,999 A gehörende Zeit nur das Zehnfache derjenigen ist, welche dem Werthe 0,5 A zukommt.

B.

Das Vorhergehende möge für den Fall der Auflösung von Calciumcarbonat in Salzsäure Benutzung finden. Es geschieht bei dem genannten Vorgange die Umwandlung bekanntlich nach der Gleichung

$$8) \qquad Ca\,CO_3 + 2\,H\,Cl = Ca\,Cl_2 + CO_2 + H_2\,O.$$

Man setze voraus, dass anfänglich P Moleküle $H\,Cl$ in dem Volumen V vorhanden gewesen seien und dass sich y Moleküle $Ca\,Cl_2$ (Chlorcalcium) in der Zeit t gebildet haben. Dann gebe man t als Function von y, ferner y als Function von t an; endlich $y_{t=\infty}$.

Anmerkung. Bezüglich der Ergebnisse und ihrer geometrischen Darstellung möge Th. I, S. 21 unter § 14, I, ferner S. 46 unter § 23, A, Beachtung finden. Desgleichen die im Literaturverzeichniss des II. Theiles genannte Abhandlung von Boguski.

C.

Um durch Messungen festzustellen, dass die unter A gegebene Theorie, insbesondere die dort gemachte Annahme: „Reactionsgeschwindigkeit proportional der Menge des wirkenden Stoffes“ richtig sei, hat man geeignete chemische Vorgänge so angeordnet, dass bei denselben die Grösse A bekannt war, zusammengehörende Werthe von x und t aber viele Male sich genau beobachten liessen.

In allen solchen Fällen muss, laut Gleichung 3, der Werth

$$9) \qquad K = \frac{1}{t}\, l\, \frac{A}{A-x}$$

für sämmtliche Paare von x und t unveränderlich sein.

Das hat sich in der That gezeigt (innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler). Die vorstehende Theorie und ihre Ergebnisse, nämlich die Gesetze Nr. 4 und 6, haben mithin volle Bestätigung gefunden. Man verdankt das den Untersuchungen von Wilhelmy*) (Ein-

*) Annalen der Physik und Chemie (Poggend.) 81, 413—428 und 499—526 (1850).

wirkung verschiedener Säuren auf Rohrzucker), Harcourt und Esson*) (Reducirung von übermangansaurem Kali mit einem grossen Ueberschusse von Oxalsäure; Wechselwirkung zwischen Wasserstoffhyperoxyd und Jodwasserstoff), Ostwald**) (Katalyse des Methylacetats), van 't Hoff***) und Anderen.

Bei allen diesen Arbeiten hat sich ergeben, dass von den in Umsetzung befindlichen Stoffen, von der Temperatur u. s. w. nur eine Constante abhängt und dass durch diese der zeitliche Verlauf des Vorganges bestimmt ist.

D.

Wenn bezüglich des Anfanges eines chemischen Vorganges Unsicherheiten vorliegen (was meist der Fall ist), so wird es nöthig, die Zeit von einem anderen Augenblicke ab zu zählen. An der Rechnung ändert das nichts.

Für ein beliebiges Intervall, etwa für das zwischen den Werthepaaren t_1, x_1 und t_2, x_2, hat die Constante K den Werth

10) $$K = \frac{1}{t_2 - t_1}\, l\, \frac{A - x_1}{A - x_2}.$$

Man unterlasse nicht, Das aus Nr. 3 abzuleiten.

Die Gleichung 10 kommt auf die (weit bequemere) Form der Gleichung 3 zurück, wenn man die Substitutionen

11) $$t_2 - t_1 = \tau,\quad A - x_1 = \alpha,\quad x_2 - x_1 = \xi$$

benutzt, welche ausdrücken, dass die Zeiten und die Stoffmengen von dem (beliebig wählbaren) Augenblicke $t = t_1$, $x = x_1$, ab gezählt werden sollen.

Es geht dann Nr. 10 über in:

12) $$K\tau = l \frac{\alpha}{\alpha - \xi},$$

was in der Form ganz mit Nr. 3 übereinstimmt.

Die bei Versuchen auszuführende Rechenarbeit ist also unter Benutzung von 10 nicht umständlicher, als bei der Verwendung von Nr. 3.

---

*) Philosophical transactions, 1866, p. 193—222; bezüglich: 1867, p. 117—137.

**) Journal für praktische Chemie, Bd. 28, S. 449—495 (Jahr 1883).

***) Etudes de dynamique chimique. Amsterdam, 1884. S. 14.

E.

Näheres über das unter A—D Vorstehende, wie überhaupt über chemische Vorgänge I. Ordnung, sehe man in der am Fusse der Seiten 198 und 199 genannten Literatur; ferner auf Seite 615—625 des zweiten Bandes des 1887 erschienenen „Lehrbuches" der allgemeinen Chemie von W. Ostwald; endlich auf S. 289—294 des von Ostwald im Jahre 1889 veröffentlichten „Grundrisses".

In den beiden letztgenannten Werken ist auch auf die den Wilhelmy'schen Untersuchungen vorausgegangenen Arbeiten von Wenzel und Berthollet Rücksicht genommen. Es ist gezeigt, dass der der Gleichung Nr. 1 zu Grunde liegende Satz: „Wirkung proportional der wirkenden Masse", welchen man den Fundamentalsatz der chemischen Mechanik nennen darf, schon im Jahre 1777 durch C. F. Wenzel ausgesprochen wurde.

§ 46. Chemische Vorgänge zweiter Ordnung.

A.

Das im vorigen Paragraphen Gesagte gilt zunächst für homogene Systeme ohne Trennungsflächen; ferner unter der Voraussetzung, dass nur ein Stoff umgewandelt wird, oder bei den betreffenden Umwandlungen nur ein Stoff in Betracht kommt, weil die anderen etwa noch mitwirkenden in so grosser Menge vorhanden sind, dass die durch den chemischen Vorgang bewirkte Aenderung dieser Menge nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Wirken bei einem chemischen Vorgange zwei Stoffe, deren Mengenveränderlichkeit in Betracht gezogen werden muss, so hat man es mit einer „Reaction II. Ordnung" zu thun. Es ist dann am naturgemässesten, die Annahme zu machen, dass in jedem Augenblicke die Reactionsgeschwindigkeit v proportional sei den wirksamen Mengen eines jeden jener Stoffe und zwar dem Produkte dieser Mengen, weil v stets zu Null wird, wenn eine dieser Mengen gleich Null ist.

Man hat also:

1) $$v = K(A - x)(B - x),$$

wobei A und B die ursprünglichen Mengen der wirksamen Stoffe

bezeichnen, x die zu der Zeit t umgewandelte Menge derselben und K eine zunächst nicht näher bekannte Constante, deren Werth sich aus den betreffenden Versuchen zu ergeben hat.*)

Die Differentialgleichung aller chemischen Vorgänge zweiter Ordnung lautet mithin:

2) $$\frac{dx}{dt} = K(A - x)(B - x),$$

wobei als Einheiten die in Grammen ausgedrückten Aequivalentgewichte (Molekulargewichte, Molekulargramme, vergleiche § 45, A) zu benutzen sind, so dass man die Aenderungen beider Stoffmengen durch dieselbe Variabele x ausdrücken kann, die dann zugleich das Maass des Reactionsproductes ist.

Es soll nun die Gleichung Nr. 2 integrirt, nämlich t als Function von x, wie auch x als Function von t berechnet werden und zwar

I. für den Fall, dass die in Wechselwirkung tretenden Stoffe äquivalent sind, also $B = A$ ist,

II. für den allgemeineren Fall: $B \gtrless A$.

Dabei möge, für beide Fälle, die Zeit von dem Augenblicke an gezählt werden, in welchem der chemische Vorgang beginnt, so dass

3) $$x_{t=0} = 0$$

ist. Auch soll man, in beiden Fällen, aus den Ergebnissen der Integration ableiten, welchen Werth x für unendlich lange Zeit hat.

Lösung. I. Aus der für $B = A$ geltenden Differentialgleichung

4) $$\frac{dx}{dt} = K(A - x)^2$$

folgt durch Integration und mit gehöriger Ausnutzung der Bedingung Nr. 3:

5) $$\frac{1}{A - x} - \frac{1}{A} = Kt.$$

---

*) Gemäss Nr. 1 ist die auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Geschwindigkeitslinie $v = f(x)$ eine Curve zweiten Grades. (Siehe § 4, A; desgl. die am Fusse der Seite 197 stehende Anmerkung.)

Es ist also

6) $$\frac{x}{A-x} = AKt,$$

daher die Reactionszeit

7) $$t = \frac{x}{AK(A-x)}.$$

Das giebt:

8) $$x = \frac{AKt}{AKt+1} A,$$

mithin

9) $$x_{t=\infty} = A.$$

Die drei letztgenannten Werthe anlangend, vergleiche man Dasjenige, was im § 45 am Schlusse des Abschnittes A (von Gleichung 7 an) gesagt wurde.

II. Für den allgemeinen Fall ($B \gtrless A$) liefert Nr. 2:

10) $$\frac{dx}{(A-x)(B-x)} = K\,dt.$$

Spaltet man in Partialbrüche, integrirt und berücksichtigt wieder die Bedingung 3, so folgt für die Reactionszeit:

11) $$t = \frac{1}{(B-A)K}\, l\, \frac{A(B-x)}{B(A-x)},$$

oder, was Dasselbe ist,

12) $$t = \frac{1}{(A-B)K}\, l\, \frac{B(A-x)}{A(B-x)}.$$

Hieraus ergiebt sich:

13) $$x = \frac{B e^{(B-A)Kt} - B}{B e^{(B-A)Kt} - A} A,$$

oder

14) $$x = \frac{B e^{BKt} - B e^{AKt}}{B e^{BKt} - A e^{AKt}} A.$$

Ferner folgt aus 13:

15) $$x_{t=\infty} = A.$$

Die Gleichungen 11 bis 15 entsprechen den Nummern 4, 6 und 7 des § 45. Es ist für Dieselben wieder das daselbst am Schlusse des Abschnittes A Hervorgehobene zu beachten.

B.

Soll die vorstehende Theorie durch Messungen bestätigt werden, so muss man Versuche derartig anstellen, dass sie die Unveränderlichkeit der Werthe

16) $$\frac{x}{t(A-x)}$$

und

17) $$\frac{1}{t}\, l\, \frac{A(B-x)}{B(A-x)},$$

welche gemäss Nr. 6 und 11 constant sind, nachweisen.

Dies ist geschehen und es hat das unter A Behandelte dadurch Sicherstellung empfangen. Das Verdienst, die Theorie mitgeschaffen oder Bestätigungen derselben geliefert zu haben, gebührt den Untersuchungen von Berthelot*), Harcourt und Esson**), Guldberg und Waage***), J. J. Hood†), W. Ostwald††), van 't Hoff und einigen Anderen.

C.

I. Für den von t_1 bis t_2 reichenden Zeitraum (man vergleiche § 45, D) tritt, was nachgewiesen werden möge, an die Stelle von Nr. 6:

18) $$K(t_2 - t_1) = \frac{x_2 - x_1}{(A - x_1)(A - x_2)}.$$

Ferner an die Stelle von 11:

19) $$K(t_2 - t_1) = \frac{1}{B - A}\, l\, \frac{(B - x_2)(A - x_1)}{(A - x_2)(B - x_1)}.$$

Benutzt man die Substitutionen

20) $t_2 - t_1 = \tau,\ x_2 - x_1 = \xi,\ A - x_1 = \alpha,\ B - x_1 = \beta,$

welche aussprechen, dass die Zeiten und die Stoffmengen von demjenigen Augenblicke an gemeint sind, in welchem $t = t_1$ und $x = x_1$ ist, so gehen die Gleichungen 18 und 19 über in

21) $$K\tau = \frac{\xi}{\alpha(\alpha - \xi)},$$

bezüglich

22) $$K\tau = \frac{1}{B-A}\, l\, \frac{\alpha(\beta - x)}{\beta(\alpha - x)},$$

was mit 6 und 11 in der Form ganz übereinstimmt.

---

*) Annales de chimie et de physique; 1862, tome 66, p. 110—128.

**) Philosophical transactions, 1866, S. 216 und folg.

***) Etudes sur les affinités chimiques; Christiania, 1867.

†) Philosophical magazine, 1878, II, p. 371—383.

††) Journal f. praktische Chemie, Band 27, (1883) S. 1—39.

II. Das Ergebniss Nr. 11 lässt sich aus 10 auch mittelst der bekannten Formel *)

$$23)\quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\, l\, \frac{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}} + \text{Const.},$$

deren Giltigkeitsbedingung

$$24)\qquad 4ac - b^2 < 0$$

erfüllt ist, ableiten. Jedoch verdient die vorher (unter A, II) benutzte Spaltung in Partialbrüche den Vorzug. Man unterlasse nicht, sich hiervon zu überzeugen.

III. Für

$$25)\qquad B = A$$

giebt Nr. 12 zunächst:

$$26)\qquad t = \infty 0,$$

als Unbestimmtes. Wendet man aber Das an, was die Differentialrechnung bezüglich der Ermittelung des wahren Werthes derartiger Formen lehrt**), so folgt wieder Nr. 7. Der Nachweis möge auch hier nicht unterbleiben.

D.

Näheres, die chemischen Vorgänge zweiter Ordnung anlangend, findet man in den Ostwald'schen Werken über allgemeine Chemie, nämlich im „Grundriss" auf Seite 294—296, im „Lehrbuch" auf Seite 626—633 des zweiten Bandes.

Neben dieser Literatur benutze man, wenn nöthig, diejenige, welche durch die Fussnoten der Seite 203 genannt wurde. Ferner: van 't Hoff, Ansichten über die organische Chemie, Theil II, Seite 11 und 100. Endlich: Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin, J. 1871, Seite 340 und 341 (Abhandlung von Buchanan).

Bezüglich der geometrischen Darstellung der Zersetzungscurven (Gl. 8 und 13) möge Th. I, § 23, B und C, Beachtung finden.

---

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis; Bd. 1, § 68 der 5. Auflage.

**) Schlömilch, Compendium; Bd. 1, § 32 der 5. Auflage.

§ 47. Chemische Vorgänge dritter Ordnung.*)

A.

Wenn bei einem chemischen Vorgange drei oder noch mehr Stoffe wirken, deren Mengenveränderung in Rechnung gezogen werden muss, so liegt eine Reaction dritter oder höherer Ordnung vor.

Die Erwägungen, welche zur Aufstellung der Gleichung 2 des vorigen Paragraphen führten, erleiden in solchen Fällen offenbar keine Aenderung.

Es ist also die Differentialgleichung eines jeden derartigen Vorganges sofort angebbar; für Reactionen dritter Ordnung lautet sie

$$1) \qquad \frac{dx}{dt} = K(A - x)(B - x)(C - x),$$

wobei die Bedeutung der Grössen A, B, C, K, x und t selbstverständlich ist (nämlich gemeint im früheren Sinne; man vergleiche § 46, A).**)

Es soll die Gleichung Nr. 1 integrirt werden und zwar soll man t als Function von x berechnen

I. für den Fall, dass $C = B = A$ ist, also für den der Aequivalenz aller in Betracht kommenden Stoffe,

II. für den Fall $C = B$, $B \gtrless A$,

III. für den, dass A, B und C verschieden sind.

Im ersten Falle soll auch x als $\varphi(t)$ abgeleitet und aus dem Ergebnisse dann $x_{t=\infty}$ entnommen werden.

Bei allen drei Fällen möge die Zeit vom Zersetzungsbeginne an gezählt sein.

Lösung. I. Wenn $C = B = A$ ist, so geht Nr. 1 über in:

$$2) \qquad \frac{dx}{dt} = K(A - x)^3.$$

---

*) Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. IV, S. 89—95 (Abhandlung von A. Fuhrmann).

**) Die Geschwindigkeitslinie $v = f(x)$ ist, laut Nr. 1, eine Curve dritten Grades. Man vergleiche die am Ende der Seite 201 stehende Bemerkung.

Hieraus folgt

$$\int \frac{dx}{(A-x)^3} = Kt + \text{Constante};$$

mithin:

3) $$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(A-x)^2} - \frac{1}{A^2}\right\} = Kt;$$

also für die Reactionszeit der Werth:

4) $$t = \frac{x(2A-x)}{2A^2K(A-x)^2}.$$

Ferner giebt Nr. 3:

5) $$x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2A^2Kt+1}}\right)A,$$

daher

6) $$x_{t=\infty} = A.$$

Man beachte hier die im § 45, am Schlusse des Abschnittes A, nach Gl. 7, gemachten Bemerkungen.

II. Ist $C = B$, aber $B \gtrless A$, sind also zwei der Stoffe in äquivalenten Mengen vorhanden, so lautet die Differentialgleichung Nr. 1:

7) $$\frac{dx}{dt} = K(A-x)(B-x)^2.$$

Das liefert:

$$\int \frac{dx}{(A-x)(B-x)^2} = Kt + \text{Constante};$$

oder, wenn man in Partialbrüche spaltet,

8) $$\int \left\{\frac{L}{A-x} + \frac{M+Nx}{(B-x)^2}\right\} dx = Kt + \text{Constante}.$$

Werden die Grössen L, M und N, welche die Bedingung

9) $$L(B-x)^2 + (M+Nx)(A-x) = 1$$

zu erfüllen haben, in der bekannten Weise berechnet, so ergiebt sich:

10) $$L = \frac{1}{(A-B)^2} = N,$$

11) $$M = \frac{A-2B}{(A-B)^2}.$$

Demgemäss geht Nr. 8 über in:

12) $$\frac{1}{(A-B)^2}\left\{\int \frac{dx}{A-x} + \int \frac{A-2B+x}{(B-x)^2} dx\right\} = Kt + \text{Const.}$$

Durch Ausführung der Integrationen folgt hieraus:

$$13)\quad \frac{1}{(A-B)^2}\left\{\frac{A-B}{B-x} - l\,\frac{A-x}{B-x}\right\} = Kt + \text{Const.}$$

Da nun, der Aufgabe gemäss, die Bedingung

$$14)\quad x_{t=0} = 0$$

noch beitritt, so erhält man schliesslich für die gesuchte Reactionszeit:

$$15)\quad t = \frac{1}{(A-B)^2 K}\left\{\frac{(A-B)\,x}{B\,(B-x)} + l\,\frac{A\,(B-x)}{B\,(A-x)}\right\}.$$

III. Sind A, B und C verschieden, so giebt die Gleichung 1:

$$\int \frac{dx}{(A-x)(B-x)(C-x)} = Kt + \text{Const.}$$

Zerlegung in Partialbrüche liefert:

$$16)\quad \int\left\{\frac{L}{A-x} + \frac{M}{B-x} + \frac{N}{C-x}\right\} dx = Kt + \text{Const.},$$

wobei die Zähler L, M und N der Bedingung

$$17)\quad L(B-x)(C-x) + M(C-x)(A-x) + N(A-x)(B-x) = 1$$

genügen müssen. Aus 17 folgt:

$$18)\quad L = \frac{1}{(B-A)(C-A)},$$

$$19)\quad M = \frac{1}{(C-B)(A-B)},$$

$$20)\quad N = \frac{1}{(A-C)(B-C)}.$$

Führt man 18, 19 und 20 ein in 16, integrirt jedes der drei Glieder, berücksichtigt dann Nr. 14 und reducirt schliesslich auf die Reactionszeit t, so ergiebt sich:

$$21)\quad t = \frac{l\left\{\left(\frac{A}{A-x}\right)^{B-C}\left(\frac{B}{B-x}\right)^{C-A}\left(\frac{C}{C-x}\right)^{A-B}\right\}}{(A-B)(A-C)(B-C)K}.$$

Für $x = A, B,$ oder C folgt hieraus:

$$22)\quad t = \infty,$$

wobei § 45, Schluss des Abschnittes A, zu berücksichtigen ist.

B.

Die Gleichungen 4, 15 und 21 lehren die Unveränderlichkeit der Werthe

23) $$\frac{x(2A-x)}{t(A-x)^2},$$

24) $$\frac{1}{t}\left\{\frac{(A-B)x}{B(B-x)}+l\frac{A(B-x)}{B(A-x)}\right\},$$

25) $$\frac{1}{t}l\left\{\left(\frac{A}{A-x}\right)^{B-C}\left(\frac{B}{B-x}\right)^{C-A}\left(\frac{C}{C-x}\right)^{A-B}\right\}.$$

Wenn also eine experimentelle Bestätigung des unter A Gegebenen erfolgen soll, so müssen chemische Vorgänge dritter Ordnung, bei denen sich die Beständigkeit der Beträge 23, 24 und 25 durch sichere Messungen nachweisen lässt, aufgesucht und durchgeführt werden.

Diese Aufgabe ist bis jetzt unbehandelt geblieben. Bei ihrer Lösung werden die Chemiker diejenigen Arbeiten als Anleitung und Muster benutzen können, welche von Berthelot, Guldberg und Waage, Harcourt und Esson, van 't Hoff, Hood, Ostwald, Wilhelmy und vielen anderen bedeutenden Forschern bezüglich der Vorgänge erster und zweiter Ordnung veröffentlicht worden sind. Man sehe hierüber die in den §§ 45 und 46 gegebene, wie auch die im § 48 folgende Literatur.

C.

I. Während die Gleichung 4 in dem ersten der unter A behandelten Fälle für den von Null bis t reichenden Zeitraum gilt, hat man für die von t_1 bis t_2 sich erstreckende Zeit die verwickeltere Formel:

26) $$t_2-t_1=\frac{(x_2-x_1)(2A-x_2-x_1)}{2K(A-x_2)^2(A-x_1)^2}.$$

Man weise dies nach und zeige, dass 26 wieder die Form von Nr. 4 annimmt, wenn die Substitutionen

27) $$t_2-t_1=\tau,\ x_2-x_1=\xi,\ A-x_1=\alpha$$

zur Benutzung gelangen, also die Zeiten und die Stoffmengen von demjenigen, beliebig wählbaren, Augenblicke an gezählt werden, in welchem $t=t_1$ und $x=x_1$ ist. (Vergl. § 45, D.)

Das Entsprechende auch für den zweiten und dritten der vorher behandelten Fälle, mithin für die Gleichungen 15 und 21 durchzuführen, möge unterbleiben.

II. Setzt man in Nr. 21

$$C = B,$$

um dadurch die Gleichung 15 zu erhalten, so ergiebt sich zunächst Unbestimmtes, nämlich

28) $$t_{C=B} = \frac{0}{0}.$$

Wird aber das zur Ermittelung des wahren Werthes derartiger Ausdrücke Geltende zur Anwendung gebracht, so folgt (was nachgewiesen werden möge) Nr. 15.

Ebenso ist es in Bezug auf 4 und 15. Versucht man nämlich aus der letztgenannten Gleichung die erstgenannte zu gewinnen, indem man

$$B = A$$

nimmt, so entsteht zunächst

29) $$t_{C=B=A} = \frac{0}{0};$$

durch Anwendung der Differentialrechnung aber ergiebt sich (was ebenfalls gezeigt werden möge) alsbald Nr. 4.

Näheres hierüber sehe man, wenn nöthig, im § 5 derjenigen Abhandlung, welche am Fusse der Seite 205 genannt wurde.

§ 48. Anmerkungen und Anregungen, chemische Vorgänge betreffend.

A.

Bezüglich des in den drei vorhergehenden Paragraphen Behandelten möge noch auf Folgendes hingewiesen werden:

I. Die bei den durchgeführten Rechnungen vorausgesetzte Einfachheit ist thatsächlich selten oder nie vorhanden, weil meist mehrere Vorgänge gleichzeitig sich abspielen. Die untersuchten Fälle sind mithin als Grenzfälle anzusehen.

II. Für jeden chemischen Vorgang, welcher mit anderen gleichzeitig stattfindet, darf vorausgesetzt werden, dass sein Verlauf unabhängig ist von dem der übrigen. Es ist also in der Mechanik der Chemie das Princip der Coexistenz (neben dem in den vorigen Paragraphen benutzten der Massenwirkungen) zu Grunde zu legen, wenn Vorgänge untersucht werden.

III. Tritt bei einer Reaction der Fall ein, dass die Umwandlungsprodukte wieder die ursprünglichen Stoffe erzeugen, so

ist die Geschwindigkeit des Vorganges die Differenz zweier Reactionsgeschwindigkeiten, kann also gleich Null werden. Das ist dann chemisches Gleichgewicht.

IV. Kommen bei chemischen Vorgängen feste Stoffe (neben flüssigen oder gasförmigen) in Betracht, so ist zwar die Wirkung auch noch proportional den wirksamen Mengen, letztere sind jedoch nur von der Grösse der betreffenden Oberflächen abhängig, weil die inneren Theile der festen Stoffe für die Reaction nicht in Thätigkeit treten.*)

B.

Diejenigen, welche den Wunsch haben, chemische Untersuchungen, bei denen Differentialgleichungen zu integriren sind, in grösserer Menge kennen zu lernen, als die vorhergehenden Paragraphen sie enthielten oder nachwiesen, mögen, beispielsweise, auf die im Folgenden unter I bis VII genannten Arbeiten aufmerksam gemacht werden:

I. Urech, F., Bestimmungen des Einflusses von Temperatur und Concentration der Salzsäure auf die Inversionsgeschwindigkeit der Saccharose.**)

Es handelt sich hier um die Integration der Differentialgleichung

1) $$-\frac{du}{dt} = au,$$

in welcher u die nach einem in Minuten angegebenen Zeitintervall noch vorhandene Saccharosemenge bedeutet. Das Wasser ist dabei, grossen Ueberschusses wegen, als constant angesehen, also nur die Saccharose als chemisch wirksame Variabele aufgefasst.

II. Ostwald, W., Studien zur chemischen Dynamik. Zweite Abhandlung: Die Einwirkung der Säuren auf Methylacetat.***)

Die Untersuchung führt (S. 468 der unten genannten Quelle) zu der Differentialgleichung

---

*) Näheres über das unter A Genannte, wie auch über andere die Mechanik chemischer Vorgänge betreffende Dinge, sehe man in dem Ostwald'schen Lehrbuche der allgemeinen Chemie auf S. 634—670 des zweiten Bandes.

**) Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, Jahrgang 1883, S. 762—766.

***) Journal für praktische Chemie, Band 136, S. 449—495.

2) $$\frac{dx}{dt} = ac(b - x) + \alpha\gamma x.$$

In derselben bezeichnet x die Menge des in der Zeit t gebildeten Umwandlungsproductes; alle übrigen Grössen sind constant. Für $t = 0$, ist $x = 0$. Zu berechnen hat man: t als Function von x; x als Function von t; insbesondere $x_{t=\infty}$.

Es ergiebt sich leicht

3) $$t = \frac{\beta}{abc} \, l \, \frac{\beta}{\beta - x},$$

wobei, zur Abkürzung,

4) $$\frac{abc}{ac - \alpha\gamma} = \beta$$

gesetzt ist.

Aus Nr. 3 folgt

5) $$x = \beta\left(1 - e^{-\frac{abc}{\beta}t}\right),$$

also

6) $$x_{t=\infty} = \beta.$$

Man vergleiche § 45, A.

III. Arrhenius, Einfluss der Neutralsalze auf die Reactionsgeschwindigkeit der Verseifung von Aethylacetat.*)

Hier wird (auf Seite 112 und 115 der unten genannten Zeitschrift) die Integration der Gleichungen

7) $$k\,dt = -\frac{dC}{C^2}$$

und

8) $$-dC = kC(C + s)\,dt$$

nöthig, in denen t die Zeit, C eine veränderliche Concentration, k die specifische Reactionsgeschwindigkeit, s einen kleinen Concentrationsunterschied bezeichnet.

IV. van 't Hoff, études de dynamique chimique. (Amsterdam, 1884.)

Die hauptsächlich auftretenden Differentialgleichungen haben die Form

9) $$-\frac{dC}{dt} = kC^n,$$

*) Zeitschrift für physikalische Chemie, Jahrgang 1887, S. 110—133.

wobei k und n constante Grössen sind. Bei der Integration von Nr. 9 müssen bekanntlich die Fälle

$$n \gtrless 1 \text{ und } n = 1$$

gehörig unterschieden werden.

V. van 't Hoff, die Umwandlung von Sauerstoff in Halogene am Kohlenstoff.*)

Es führt die Untersuchung (unter verschiedenen Voraussetzungen) zu den Differentialgleichungen

$$10)\qquad \frac{dx}{dt} = c\,(p - x)\,(q - x),$$

$$11)\qquad \frac{dx}{dt} = c_1\,(p - x)\,(q - x) - c_2\,x^2,$$

$$12)\qquad \frac{dx}{dt} = c\,(p - x)\,(q - x - nx),$$

in denen c, c_1, c_2, n, p und q constante Grössen bezeichnen.

Nachdem die Veränderlichen getrennt sind, lässt sich die Integration dieser Gleichungen durchführen, indem man Das beachtet, was für Integrale von der Form

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}$$

gilt**), oder indem man Spaltung in Partialbrüche benutzt. Für Nr. 10 ist jene Integration schon im § 46, unter A, II, erfolgt.

VI. Hecht und Conrad, Beiträge zur Bestimmung von Affinitätscoefficienten.***)

Die Untersuchungen beziehen sich zunächst auf die Geschwindigkeit der Aetherbildung. Nachdem die benutzte Methode besprochen worden ist, folgt die Formulirung des Guldberg-Waage'schen Gesetzes, die Ausführung der numerischen Berechnung, die Besprechung der Construction der Zersetzungscurven und — unter Anführung von Versuchsreihen — der Nachweis experimenteller Prüfung des genannten Gesetzes (mit graphischer Darstellung). Sodann die Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die Geschwindigkeit der Aetherbildung (abermals mit sehr erfolgreicher Benutzung des Aufzeichnens, also der Anschauung).

*) Ansichten über die organische Chemie; Theil 2, S. 92 u. folgende.

**) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Band 1, § 68 der 5. Auflage.

***) Zeitschrift für physikalische Chemie, J. 1889, S. 450—475.

VII. Burchard; Guldberg und Waage; Meyerhoffer; Näheres, bezüglich der Titel der Abhandlungen, im „Literaturverzeichniss".

Bei Meyerhoffer treten die Gleichungen

$$\frac{dx}{dt}=\frac{K(A-x)^2}{x}, \tag{13}$$

$$\frac{dx}{dt}=K(A-x)^n,\ n=3,4,5,6,7, \tag{14}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{K(A-x)^2}{x+m}, \tag{15}$$

$$\frac{dx}{dt}=Kx(A-x)^2 \tag{16}$$

auf.

Bei Burchard findet man die in den §§ 45 und 46 behandelten Differentialgleichungen und ausserdem:

$$\frac{dx}{dt}=K(a-x)^5(a-x); \tag{17}$$

ferner sehr gute und zahlreiche graphische Darstellungen.

Capitel IV.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

---

§ 49. Fadencurven und Kettenlinien.

A.

Zwischen zwei festen Punkten, die A und B heissen mögen, sei ein vollkommen biegsamer, nicht dehnbarer Faden (oder eine Kette mit unendlich kleinen Gliedern) aufgehangen und auf ein räumliches rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen. Die Dichtigkeit ε des Materials, der Querschnitt q und die Fadenlänge s sollen bekannt sein. Gegebene Kräfte mögen auf jeden Punkt des Fadens wirken und sich an ihm im Gleichgewichte befinden. Mit X, Y und Z sollen die im Sinne der positiven Coordinatenachsen thätigen äusseren Kräfte (Componenten) bezeichnet werden, welche auf die Masseneinheit des Fadens wirken würden, wenn letztere in dem allgemeinen Punkte, dessen Coordinaten x, y und z sind, concentrirt wäre.

Es sind dann an dem Fadenelemente ds die Kräfte

1) $$Xq\varepsilon ds, \quad Yq\varepsilon ds, \quad Zq\varepsilon ds$$

im Sinne der Achsen thätig; ferner an den Enden des Elementes (einander entgegen wirkend) die Spannungen

$$T \text{ und } T + dT,$$

in den Richtungen der betreffenden Tangenten.

Werden die Winkel, welche T mit den Coordinatenachsen bildet, τ_x, τ_y und τ_z genannt, so hat man für die im Sinne der Achsen thätigen Componenten jener Spannung die Werthe

$$T\cos\tau_x, \quad T\cos\tau_y, \quad T\cos\tau_z,$$

oder

2) $$T\frac{dx}{ds},\ T\frac{dy}{ds},\ T\frac{dz}{ds};$$

ferner für die Componenten derjenigen Spannung $T + dT$, welche am anderen Ende des Elementes ds wirkt:

3) $$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right),\ T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right),\ T\frac{dz}{ds}+d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Dass Verschiebungen, in den Richtungen der drei Coordinatenachsen, nicht stattfinden können, wird mithin, gemäss Nr. 1, 2 und 3, ausgedrückt durch die Gleichungen:

4) $$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+Xq\varepsilon\,ds=0,$$

5) $$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Yq\varepsilon\,ds=0,$$

6) $$d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Zq\varepsilon\,ds=0.$$

Da auf Drehung keine Rücksicht genommen zu werden braucht, weil Kräftepaare nicht in Betracht kommen*), so hat man in Nr. 4 bis 6 die Bedingungen für das Gleichgewicht des Fadens. Bei der Anwendung dieser drei Differentialgleichungen (4—6) ist zu beachten, dass X, Y, Z, q und ε im Allgemeinen veränderlich sind; ferner, dass eine der Gleichungen wegfällt, wenn die sämmtlichen Kräfte in einer Ebene wirken. Man sehe das unter B bis D Folgende.

B.

Der aufgehangene Faden sei homogen, möge überall den Querschnitt 1 haben und nur der Schwere unterliegen, die wir uns im Sinne der negativen Y-Achse der Fig. 66 wirkend denken (die Fadenebene als XY-Ebene benutzend). Das Gewicht der Längeneinheit soll mit p bezeichnet werden.

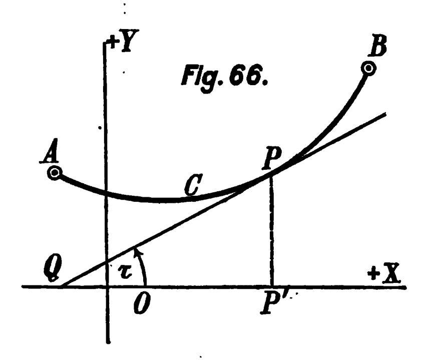
Man berechne, von den Bedingungen Nr. 4—6 ausgehend:

I. nach welchem Gesetze die Spannung T sich ändert, nämlich abhängt von dem Tangentenwinkel τ und der Scheitelspannung T_0;

*) Näheres hierüber: Duhamel, analytische Mechanik, Bd. 1, S. 87 und 88. — Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, S. 643 und 644 der ersten Auflage; oder Bd. 2, S. 88 und 89 der zweiten.

II. wie die, auf die Form $y = f(x)$ gebrachte, Gleichung derjenigen Curve lautet, nach welcher der Faden sich im Gleichgewichtszustande krümmt.

Bei der Ermittelung der unter II verlangten Gleichung möge, wenn nöthig, eine Verschiebung des in Fig. 66 angegebenen Coordinatensystems vorgenommen werden.



Lösung. I. Von den Bedingungen Nr. 4, 5 und 6 kommen nur die beiden erstgenannten in Betracht. Dabei ist

$$X = 0,\ Y = -\frac{p}{\varepsilon},$$

also

7) $$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

und

8) $$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = p\,ds.$$

Aus Nr. 7 folgt durch Integration

9) $$T\cos\tau = C,$$

also der Satz: die Horizontalspannung ist unveränderlich.

Da die im Scheitel der Fadencurve herrschende Spannung mit T_0 bezeichnet worden ist, so giebt Nr. 9:

10) $$T_0 = C;$$

das heisst: die Integrationsconstante C bedeutet die Scheitelspannung.

Ferner ist, gemäss 9 und 10:

11) $$T = T_0 \sec\tau.$$

Es gilt daher der Satz: Die Spannungen wachsen, vom Scheitel aus, wie die goniometrischen Secanten der Tangentenwinkel.

II. Wird Nr. 11 in 8 eingeführt, so folgt, weil $\tan\tau = y'$ und $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ ist,

12) $$T_0\, dy' = p\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

oder

13) $$T_0\, y'' = p\sqrt{1+y'^2}.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die allgemeine Form

$$y'' = f(y')$$

und giebt zunächst

14) $$x = k\int\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

wenn, zur Abkürzung,

15) $$\frac{T_0}{p} = k$$

gesetzt wird.

Aus Nr. 14 folgt:

16) $$x = kl(y' + \sqrt{1+y'^2}) + C_1,$$

wobei C_1 eine Integrationsconstante bezeichnet.

Verschiebt man das Coordinatensystem, parallel zur ursprünglichen Lage, bis O (Fig. 66) in den Scheitel C der Fadencurve kommt, so ist

17) $$y'_{x=0} = 0.$$

Damit ergiebt sich:

18) $$C_1 = 0.$$

Also geht Nr. 16 über in:

19) $$x = kl(y' + \sqrt{1+y'^2}).$$

Reducirt man diese Gleichung auf y' und integrirt dann, nachdem die Veränderlichen getrennt worden sind, zum zweiten Male, so folgt:

20) $$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) + C_2,$$

wobei C_2 die neue Integrationsconstante bedeutet.

Da, bei der angenommenen Lage des Coordinatensystems, für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, so giebt Nr. 20:

$$21)\qquad y + k = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man die Abscissenachse um die Strecke k unter den Scheitel legt. Dann lautet Nr. 21:

$$22)\qquad y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

C.

Die im Vorhergehenden behandelte Linie heisst bekanntlich Seilcurve, oder gemeine Kettenlinie. (Bezüglich ihrer Länge sehe man § 13.)

Der in Nr. 22 vorkommende Parameter k ist im Sinne der Geometrie die Scheitelordinate; im Sinne der Mechanik, laut Gleichung 15, das Verhältniss der Scheitelspannung zum Gewichte der Längeneinheit des Fadens.

Ist k bekannt, so hat man, gemäss 15, auch die Scheitelspannung T_0.

Ferner, unter Benutzung von 11 und 22, die an dem allgemeinen Punkte herrschende Spannung T als Function von x, weil $\sec\tau$ durch $\tan\tau$, also durch y', ausdrückbar ist, letzteres aber durch Differentiation von Nr. 22 sich ergiebt.

Man erwäge (die Aufhängepunkte in gleicher Höhe voraussetzend und Nr. 22 zu Grunde legend), wie sich der Parameter k bestimmen lässt, wenn gegeben sind:

α) die Kettenlänge s und die Einsenkungstiefe;

β) s und die Ordinate des einen Aufhängepunktes;

γ) s und der Aufhängungswinkel, nämlich derjenige Winkel, welchen die am Endpunkte B der Kette liegende Tangente mit der Abscissenachse bildet;

δ) Kettenlänge und Spannweite;

ε) Einsenkungstiefe und Spannweite.

Näheres hierüber und bezüglich anderer Punkte, welche die Seilcurve betreffen: Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Theil I, S. 98—102 (Nr. 110 und 111) der 2. Auflage.

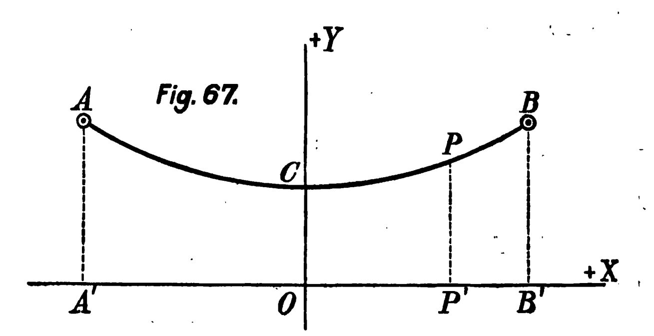
D.

Es möge nun vorausgesetzt werden, dass der Querschnitt q des in Betracht gezogenen Fadens veränderlich sei und zwar nach dem Gesetze

23) $$q = q_0 \cos \tau,$$

in welchem q_0 den Inhalt des Scheitelquerschnitts bedeutet. Ferner möge bekannt sein, dass der Aufhängepunkt B (Fig. 67) die Coordinaten $OB' = a$, $B'B = b$ habe, der Scheitel die Ordinate $OC = c$.

Im Uebrigen soll das unter B Angenommene gelten, also der Faden homogen sein und nur der Schwere unterliegen.



Ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen Nr. 4—6 berechne man

I. Art und Bestimmungsstücke derjenigen Linie, nach welcher der Faden sich krümmt,

II. den Werth der an dem allgemeinen Punkte P (Coordinaten $OP' = x$ und $P'P = y$) herrschenden Spannung T; nämlich T ausgedrückt durch a, b, c, g, ε, q_0 und x;

III. den in P auf die Flächeneinheit kommenden Betrag der Spannung (als Function von a, b, c, g, ε und x).

Lösung. I. An die Stelle der Gleichungen 4—6 treten die Bedingungen

24) $$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

und

25) $$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = g\, q_0\, \varepsilon\, dx,$$

deren erste mit Nr. 7 übereinstimmt, also die Beziehungen 9—11, überhaupt das unter B, I, Ausgesprochene, liefert.

Führt man Nr. 11 ein in 25, so ergiebt sich:

26) $$d\left(T_0 \frac{dy}{dx}\right) = g\, \varepsilon\, q_0\, dx,$$

oder

$$T_0 \frac{dy'}{dx} = g\,\varepsilon\,q_0,$$

was eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$y'' = \text{Constante}$$

ist.

Wird Nr. 26 integrirt und dabei, die Constante anlangend, berücksichtigt, dass für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ sein muss, so folgt:

27) $$T_0 \frac{dy}{dx} = g\,\varepsilon\,q_0 x.$$

Nochmalige Integration giebt:

28) $$x^2 = \frac{2\,T_0}{g\,\varepsilon\,q_0}(y - c),$$

wenn die in der Aufgabe genannte Bedingung

29) $$y_{x=0} = c$$

bei der Constantenberechnung Ausnutzung findet.

Nun erhält man die unbekannte Scheitelspannung T_0, wenn man für Nr. 28 benutzt, dass $y = b$ sein muss, wenn $x = a$ ist. Das liefert:

30) $$T_0 = \frac{g\,\varepsilon\,q_0\,a^2}{2(b-c)}.$$

Hiermit geht 28 über in:

31) $$x^2 = \frac{a^2}{b-c}(y - c).$$

Der Faden krümmt sich also nach einer g e m e i n e n P a r a b e l von selbstverständlicher Lage und der Halbparameterlänge

32) $$p = \frac{a^2}{2(b-c)},$$

welche bekanntlich sehr leicht construirt werden kann.

II. Aus 11, 30 und 31 ergiebt sich für die im allgemeinen Fadenpunkte herrschende Spannung:

33) $$T = \frac{g\,\varepsilon\,q_0}{2(b-c)}\sqrt{a^4 + 4(b-c)^2 x^2},$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt,

34) $$T = \frac{a\,g\,\varepsilon\,q_0}{2(b-c)}\sqrt{a^2 + 4(b-c)(y-c)}.$$

Es nimmt also, vom Scheitel aus, die Spannung stets zu und hat an den Aufhängepunkten den Werth

35) $$T_{x=a} = \frac{a g \varepsilon q_0}{2(b-c)} \sqrt{a^2 + 4(b-c)^2}.$$

III. Auf die Flächeneinheit kommt der Betrag

36) $$\frac{T}{q} = \frac{g \varepsilon}{2 a^2 (b-c)} (a^4 + 4 [b-c]^2 x^2),$$

welcher ebenfalls die Eigenschaft besitzt, vom Scheitel ab unausgesetzt zu wachsen.

§ 50. Krümmung des Wasserspiegels an einer ebenen Wand.

A.

Für die Ordinate $P'P$ derjenigen Linie c (Fig. 68), welche den senkrechten Durchschnitt eines Wasserspiegels an einer ebenen Wand darstellt, gilt, nach Hagen, die Gleichung

1) $$y = \frac{S}{\gamma r}.$$

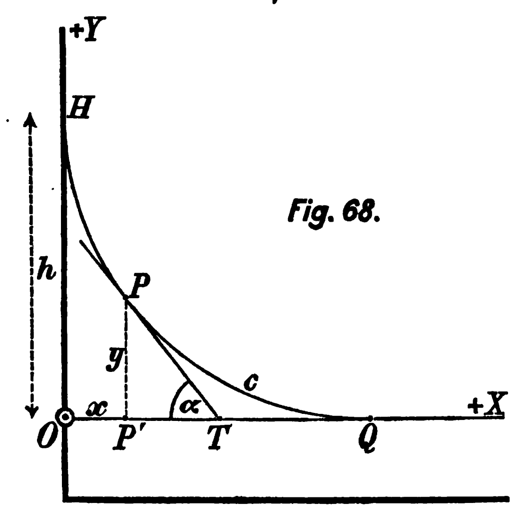


Fig. 68.

In derselben bedeutet

S die Spannung des Oberflächenelementes (welche als constant vorausgesetzt und auf einen Streifen von der Breite 1 bezogen ist)

γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit,

r den Krümmungshalbmesser.*)

*) Weisbach, theoretische Mechanik; § 405 und 407 der 5. Aufl. — Oder: Hagen, über die Oberfläche der Flüssigkeiten, S. 18.

Man soll aus Nr. 1 ableiten:

I. die Ordinate y als Function des Winkels α und der Steighöhe h, welche letztere als gegeben vorausgesetzt wird;

II. die Abscisse x, ebenfalls als Function von α und h.

Auch soll

III. ermittelt werden, wie die Gleichung der Curve c, in der Form $x = f(y)$, lautet.

Dass $y = o$ ist, wenn $\alpha = o$, ferner $y = h$, wenn $\alpha = 90^0$, möge für I als bekannt gelten.

Lösung. I. Versteht man unter s die Länge des Bogens HP, so ist

2) $$r = -\frac{ds}{d\alpha}.$$

Es gilt nämlich für den Krümmungshalbmesser bekanntlich die Gleichung

3) $$r = \frac{ds}{d\tau},$$

wobei τ den Tangentenwinkel bezeichnet (also $\tan\tau = y'$ ist); zwischen τ und α aber besteht die Beziehung

4) $$\tau = 360^0 - \alpha,$$

mithin

5) $$d\tau = -d\alpha.$$

Beachtet man ferner, dass

$$\sin\alpha = -\frac{dy}{ds},$$

daher

6) $$ds = -\frac{dy}{\sin\alpha},$$

so geht Nr. 2 über in

7) $$r = \frac{dy}{\sin\alpha\, d\alpha}.$$

Wird das in die Gleichung 1 gesetzt und dann integrirt, so entsteht:

8) $$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{S}{\gamma}\cos\alpha + C_1,$$

wobei C_1 die Integrationsconstante bezeichnet. Sie folgt aus der Bedingung

9) $$y_{\alpha=0} = 0.$$

Durch Einführung der Letzteren ergiebt sich:

10) $$Y = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Um nun noch $\frac{S}{\gamma}$ loszuwerden und dafür h in die Gleichung zu bringen (was die Aufgabe verlangt), hat man die Festsetzung

11) $$y_{\alpha = 90^0} = h$$

auszunutzen. Sie liefert, gemäss Nr. 10:

12) $$y = \sqrt{2}\, h \sin\frac{\alpha}{2},$$

womit das unter I Geforderte erledigt ist.

Anmerkung. Zu dem Ergebnisse 12 gelangt man selbstverständlich auch, wenn für den Krümmungshalbmesser der Werth

13) $$r = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

an Stelle von Nr. 2 oder Nr. 3 benutzt wird. Die zu integrirende Differentialgleichung lautet dann:

14) $$y'\,dy' = \frac{\gamma}{S}\, y \sqrt{1 + y'^2}^3\, dy,$$

ist also von der allgemeinen Form

15) $$y'' = F(y, y').$$

II. Um x als $f(\alpha, h)$ zu erhalten, wird man die aus der Figur ersichtliche Beziehung

16) $$-dy = dx \,.\, \tan\alpha$$

verwenden. Sie bietet die Möglichkeit, aus Nr. 12 zunächst dx als $\varphi(\alpha, h)$ abzuleiten, dann aber x als $f(\alpha, h)$ durch Integration zu gewinnen. Auf diesem Wege ergiebt sich:

17) $$-x = \sqrt{2}\, h \int \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\tan\alpha}\, d\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Mit Benutzung der Formel

18) $$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

hat man dann weiter:

19) $$-x = \frac{h}{\sqrt{2}}\left\{\int \frac{d\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} - 2\int \sin\tfrac{1}{2}\alpha\, d\tfrac{1}{2}\alpha\right\}.$$

Hieraus folgt, indem von der Beziehung

20) $$d\,l \tan\frac{1}{2}v = \frac{dv}{\sin v}$$

Gebrauch gemacht wird:

21) $$-x = \frac{h}{\sqrt{2}}\left\{l\tan\frac{\alpha}{4} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right\} + C_2,$$

wobei C_2 die Integrationsconstante bezeichnet.

Letztere gewinnt man durch Verwerthung des Umstandes, dass $x=0$ ist, für $\alpha = 90^0$. Es liefert das:

22) $$x = \left\{1 - \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}-1}{\tan\frac{\alpha}{4}}\right\}h,$$

was auch in der Form

23) $$x = \left\{1 - \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left([\sqrt{2}+1]\tan\frac{\alpha}{4}\right)\right\}h$$

gegeben werden kann.

Gemäss Nr. 23 ist die X-Achse des Coordinatensystems Asymptote der Curve c, nämlich

24) $$x_{\alpha=0} = \infty\,.$$

III. Die Gleichung der letztgenannten Linie folgt, in der durch die Aufgabe verlangten Form, wenn man α aus 12 und 23 eliminirt. Unter Benutzung der Formel

25) $$\tan\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}$$

ergiebt sich hierbei:

26) $$x = h - \sqrt{2h^2 - y^2} + \frac{h}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}\,h + \sqrt{2h^2 - y^2}}{(1+\sqrt{2})\,y}\,.$$

B.

Messungen, welche Hagen für Brunnenwasser angestellt hat, stimmen mit den vorstehenden Ergebnissen sehr gut überein. Man sehe hierüber: Weisbach, theoretische Mechanik, S. 910, wo aus jenen Messungen abgeleitet wird, dass

27) $$S = 4{,}8 \text{ Milligramm}$$

die Spannung eines Oberflächenstreifens von 1 Millimeter Breite

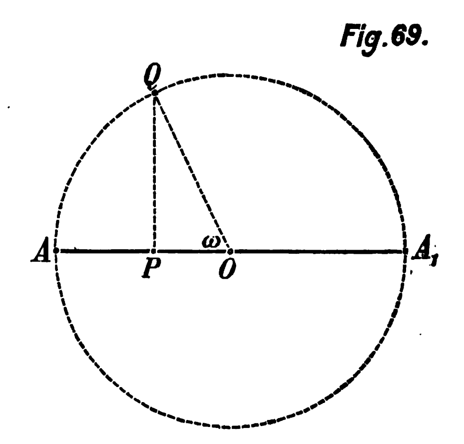
ist. Es folgt Das aus Nr. 10 und der gemessenen Höhe $h = 1{,}37$ Pariser Linien unter Benutzung des Verhältnisses: 1 Pariser Linie $= 2{,}255$ Millimeter.

§ 51. Geradlinige Bewegung zufolge einer Kraft, welche dem Abstande von einem festen Punkte proportional ist.*)

Ein Punkt P, von der Masse 1, befindet sich zu der Zeit t in dem Abstande $OP = x$ (Fig. 69) von einem festen Centrum O und hat zu jener Zeit die Geschwindigkeit v im Sinne PO. Er unterliegt der Wirkung einer beschleunigenden Kraft, welche der Entfernung x proportional ist und für $x = 1$ den Werth k^2 hat.

Anfänglich, also zu der Zeit Null, war der Punkt P in dem Abstande $OA = a$ in Ruhe.

Fig. 69.



Man soll

I. die Veränderlichen x und v als Functionen von t berechnen, dann aber

II. mittelst der für x und v erhaltenen Gleichungen angeben, in welcher Weise der Punkt P sich bewegt (hin und her schwingt), insbesondere ableiten:

α) für welche Zeiten der Abstand x die Werthe Null, $+a$, oder $-a$ hat, nämlich P sich in O, A oder A_1 befindet;

*) Man vergleiche § 52, 53, 59, 60 und 61.

β) zu welchen Zeiten die Geschwindigkeit v gleich Null ist und zu welchen anderen sie ihre grössten oder kleinsten Werthe hat;

γ) wieviel die Schwingungsdauer beträgt, d. h., welche Zeit T der Punkt P braucht, um den ganzen Weg von A nach A_1 und wieder zurück bis A zu durchlaufen; auch, wie sich x und v durch T, t und a ausdrücken lassen;

δ) um wieviel diejenigen Zeiten sich unterscheiden, zu denen P in derselben Schwingungsphase ist, also die Beträge von x und v, sowohl bezüglich der absoluten Werthe, als auch hinsichtlich der Vorzeichen, wiederkehren.

Endlich soll

III. gezeigt werden, wie sich die Ergebnisse geometrisch darstellen lassen und zwar entweder unter Benutzung des über AA_1 als Durchmesser gezeichneten Kreises, oder wellenförmig laufender Linien, deren Abscissen die Zeiten sind.

Lösung. I. Die Beschleunigung, welche p heissen möge, hat bekanntlich (siehe § 37, A) den allgemeinen Werth

$$1) \qquad p = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

wobei s den zu der Zeit t zurückgelegten Weg bedeutet.

Andererseits ist, der Aufgabe gemäss,

$$2) \qquad p = k^2 x.$$

Mithin lautet die Differentialgleichung der vorliegenden Bewegung:

$$3) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = k^2 x,$$

oder, wegen $s = AP = a - x$:

$$4) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x.$$

Um diese Gleichung, welche die Form $x'' = f(x)$ hat, zu integriren, setzen wir*)

*) Man vergleiche, wenn nöthig: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 111 der 5. Auflage.

5) $$\frac{d^2x}{dt^2} = x' \frac{dx'}{dx},$$

wobei

6) $$x' = \frac{dx}{dt} = -v$$

ist, und haben dann, statt 5,

7) $$x' \frac{dx'}{dx} = -k^2 x.$$

Trennt man in Nr. 7 die Veränderlichen x und x', führt die Integration aus und bestimmt hierbei die Constante mittelst der Bedingung, dass v gleich Null sein soll, wenn x den Werth a hat, so ergiebt sich:

8) $$v = \mp k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Daher folgt, gemäss Nr. 6, weiter:

9) $$\frac{dx}{dt} = \pm k \sqrt{a^2 - x^2},$$

was, wie 7, abermals eine Differentialgleichung erster Ordnung ist.

Wird Nr. 9 integrirt und die neue Constante aus der vorgeschriebenen Bedingung

10) $$x_{t=0} = a$$

hergeleitet, so erhält man:

11) $$x = a \cos kt.$$

Nun ergiebt sich aus 11 und 6, oder auch aus 11 und 8:

12) $$v = a k \sin kt.$$

Durch die Gleichungen 11 und 12 ist der Abschnitt I der Aufgabe erledigt.

Anmerkung. Lässt man bei der zweimaligen Integration der Differentialgleichung Nr. 4 die beiden Constanten einstweilen unberechnet, so folgt:

13) $$x = A \sin kt + B \cos kt.$$

Die Einführung der Bedingungen: für $t = 0$ muss $x = a$ und $v = 0$, also $\frac{dx}{dt} = 0$, sein, liefert dann die Werthe der Integrationsconstanten A und B, was wieder auf 11 und 12 führt. Man unterlasse nicht, sich hiervon zu überzeugen.

II. α. Die Gleichung Nr. 11 lehrt, mit der Anschauung in Uebereinstimmung: der Punkt P schwingt unaufhörlich um das

Centrum O mit der Ausschlagweite (Amplitude) $OA = OA_1 = a$. Dabei ist

14) $$x = 0,$$

also P in O, zu den Zeiten

15) $$t = \frac{\pi}{2k}, \frac{3\pi}{2k}, \frac{5\pi}{2k}, \frac{7\pi}{2k}, \ldots\ldots;$$

ferner

16) $$x = +a,$$

nämlich P an der Stelle A, wenn

17) $$t = 0, \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}, \ldots\ldots;$$

endlich

18) $$x = -a,$$

daher P bei A_1, falls

19) $$t = \frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{5\pi}{k}, \ldots\ldots$$

β) Die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt P sich bewegt, hat laut Gleichung 12 den Werth

20) $$v = 0$$

zu den Zeiten

21) $$t = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \ldots\ldots,$$

also, gemäss 17 und 19, wenn P sich in A oder A_1 befindet.

Ferner ist, nach jener Gleichung 12, die Geschwindigkeit am grössten, nämlich

22) $$v = +ak,$$

wenn

23) $$t = \frac{\pi}{2k}, \frac{5\pi}{2k}, \frac{9\pi}{2k}, \ldots\ldots,$$

daher (vergl. Nr. 15) wenn P die Stelle O auf dem Wege von A nach A_1 durchläuft.

Endlich hat, gemäss Nr. 12, die Geschwindigkeit ihren kleinsten Werth

24) $$v = -ak,$$

falls

25) $$t = \frac{3\pi}{2k}, \frac{7\pi}{2k}, \frac{11\pi}{2k}, \ldots\ldots,$$

d. i., wenn P auf dem Wege von A_1 nach A bei O vorüberkommt.

γ) Für die Schwingungsdauer ergiebt sich:

26) $$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Sie ist also unabhängig von a, was besondere Beachtung verdient.

Mit Benutzung von Nr. 26 hat man:

27) $$x = a \cos \frac{2\pi t}{T},$$

28) $$v = \frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

δ) Zu den Zeiten, welche sich um ein ganzes Vielfaches von $\frac{2\pi}{k}$, also von T, unterscheiden, befindet sich der Punkt P in derselben Schwingungsphase. Es ist, entsprechend Nr. 11 und 12,

29) $$x = a \cos k\left(t + \frac{2n\pi}{k}\right) = a \cos k(t + nT),$$

30) $$v = ak \sin k(t + nT),$$

wobei

31) $$n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

III. Der in Nr. 8 vorkommende Ausdruck $\sqrt{a^2 - x^2}$ bedeutet bekanntlich die Länge der Ordinate PQ (Fig. 69) des über AA_1 (als Durchmesser) beschriebenen Kreises. Es sind mithin die Geschwindigkeiten den betreffenden Ordinatenlängen proportional, können daher sehr leicht veranschaulicht werden.

Die Bewegung von P auf dem Kreisdurchmesser AA_1 ist identisch mit der Bewegung der senkrecht auf AA_1 genommenen Projection eines Punktes Q, welcher den Kreisumfang mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{2\pi a}{T}$ durchläuft. (Vergleiche Th. I, § 16, B.)

Werden die durch Nr. 11 und 12 bestimmten Beträge von x und v als Ordinaten von Curven aufgetragen, deren Abscissen die Zeiten sind, so ergeben sich die in der Aufgabe unter III angedeuteten wellenförmigen Linien, welche die Centrumabstände, bezüglich die Geschwindigkeiten, graphisch darstellen. Das Aufzeichnen jener Curven ist zu empfehlen.

§ 52. Freier Fall im Inneren der Erde.

Man fasse unseren Planeten als homogene Kugel (Halbmesser a) auf und stelle sich vor, dass durch den Mittelpunkt ein Schacht getrieben sei. In dem Letzteren möge, von der Oberfläche aus, ein Körper (materieller Punkt P, Masse 1) widerstandsfrei fallen und zwar ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Es soll berechnet werden, in welcher Weise die Bewegung jenes Körpers stattfinden muss, wenn der Schachtquerschnitt so gering ist, dass er vernachlässigt werden darf, man daher die Erde als Vollkugel zu behandeln hat.

Lösung. Die von der Erdmasse auf den im Schachte beweglichen Punkt P ausgeübte Anziehung ist (laut § 34, B, II) dem Abstande vom Centrum proportional; also

1) $$p = k^2 x,$$

wenn man mit p die Beschleunigung, mit k eine Constante und mit x den (allgemeinen) Abstand vom Mittelpunkte bezeichnet. Wird ferner unter g diejenige Beschleunigung verstanden, welche an der Oberfläche herrscht, so gilt (gemäss Nr. 1) die Gleichung:

2) $$g = k^2 a;$$

daher ist

3) $$k = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Hiermit kommt die Lösung der Aufgabe zurück auf § 51. Es gilt also das dort Angegebene, nur ist stets $\sqrt{\frac{g}{a}}$ an die Stelle von k zu setzen.

Für g und a können dabei, wenn es sich nur um Näherungen handelt, die Werthe

4) $$g = 9{,}81 \text{ Meter},$$

5) $$a = 6370{,}3 \text{ Kilometer*)}$$

Benutzung finden.

---

*) Genaueres: Helmert, Theorien der höheren Geodäsie, Th. I, S. 68. — Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Th. III, S. 33 der 2. Auflage.

§ 53. Schwingungen eines elastischen Körpers.

A.

Wird durch irgend welche Kräfte ein Theilchen eines elastischen Körpers um die sehr kleine Strecke a, welche innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt, aus der Gleichgewichtslage gebracht, dann aber der Wirkung der Molekularkräfte überlassen, so schwingt es um seine ursprüngliche Lage.

Die beschleunigende Kraft p, welche diese Schwingungen verursacht, ist jedenfalls eine Function desjenigen Abstandes x, den das schwingende Theilchen zu der Zeit t von der Gleichgewichtslage hat; also

1) $$p = f(x).$$

Denkt man sich diese Function durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe ausgedrückt und beachtet, dass für $x = 0$ auch jene Kraft gleich Null sein muss, mithin kein Glied ohne x vorkommen kann, so ergiebt sich:

2) $$p = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots,$$

wobei die C unbekannte Coefficienten bezeichnen.

Es soll angegeben werden, wie sich derartige Schwingungen analytisch behandeln lassen, wenn x so klein ist, dass in Nr. 2 alle diejenigen Potenzen, welche höher sind als die erste, vernachlässigt werden dürfen.

Lösung. Es ist in diesem Falle

3) $$p = C_1 x.$$

Andererseits, wenn man die Masse des schwingenden Körpertheilchens gleich 1 nimmt und gehörig beachtet, dass die bewegende Kraft den Werth von x stets zu verkleinern strebt,

4) $$p = -\frac{d^2 x}{d t^2}$$

(laut Theil I, § 12, Nr. 6).

Die Differentialgleichung der zu behandelnden Bewegung lautet mithin:

5) $$\frac{d^2 x}{d t^2} = - C_1 x.$$

Sie stimmt, wenn

6) $$C_1 = k^2$$

gesetzt wird, überein mit Nr. 4 des § 51. Mithin kommt wieder Alles auf das daselbst Angeführte zurück.

B.

Beispielsweise möge hervorgehoben werden, dass in der unter A besprochenen Art Folgendes behandelt werden kann:

α) die Bewegung eines leuchtenden Punktes und der durch sie hervorgerufene Zustand des Lichtäthers (Wellenbewegung einer Punktreihe);

β) die Längenschwingungen, Querschwingungen und Torsionsschwingungen elastischer Fäden oder Stäbe; die aus solchen Schwingungen zu entnehmende Bestimmung von Elasticitätsmodeln.

Ueber α sehe man: Neumann, theoretische Optik (1885), S. 10—13; oder: Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, § 123 bis 126 der 4. Auflage (v. J. 1882).

Ferner über β: Weisbach, theoretische Mechanik, S. 1195 bis 1201 der 5. Auflage (v. J. 1875).*)

§ 54. Freier Fall mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Schwere, doch ohne Widerstand.

Ein als Punkt von der Masse 1 behandelbarer Körper möge, ohne Anfangsgeschwindigkeit, von A aus (Fig. 70) nach der Erde zu fallen. Der Abstand $CA = a$ sei, verglichen mit dem Halbmesser $CB = r$ der Erdkugel (die homogen gedacht werden soll), so gross, dass auf die während des Fallens vorliegende Veränderlichkeit der Anziehung Rücksicht genommen werden muss. Widerstände mögen nicht in Betracht kommen; es soll also nur die (variabele) Schwere wirken.

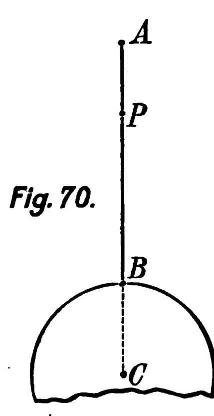


Fig. 70.

Man ermittele (unter Benutzung von § 34, B, II, und § 37, A) zunächst diejenige Differentialgleichung, welche für die zwischen A und B stattfindende Bewegung gilt, wobei der in der Zeit t durchlaufene Weg AP mit s bezeichnet werden möge und, wie immer, die an der Erdoberfläche herrschende Beschleunigung der Schwere mit g.

*) In Bezug auf elliptische Schwingungen möge § 59 Beachtung finden.

Hierauf berechne man, durch Integration jener Differentialgleichung, die Geschwindigkeit v, ausgedrückt durch a, g, r und s, welche der Körper erwarb, indem er die Strecke AP durchfiel; sodann die Zeit t, welche zum Durchlaufen jener Strecke nöthig war (ebenfalls durch die vorher genannten vier Grössen dargestellt).

Endlich benutze man die erhaltenen Formeln zur Ableitung derjenigen Zeit T, nach welcher der fallende Körper an der Erdoberfläche eintrifft, und derjenigen Geschwindigkeit V, mit welcher er dort anlangt.

Lösung. Die bei P herrschende Beschleunigung hat, gemäss § 34, B, II, den Werth

1) $$p = \frac{r^2}{(a-s)^2} g.$$

Demzufolge gilt, laut § 37, A, für das Fallen bis zur Oberfläche der Erde die Differentialgleichung:

2) $$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{r^2}{(a-s)^2} g,$$

oder

3) $$v \frac{dv}{ds} = \frac{r^2}{(a-s)^2} g.$$

Nr. 2 ist von der Form

4) $$s'' = f(s).$$

Benutzt man Nr. 3, trennt die Veränderlichen, integrirt und berechnet die Constante aus der Bedingung, dass v gleich Null sein muss, wenn s gleich Null ist, so ergiebt sich für die gesuchte Geschwindigkeit

5) $$v = \sqrt{\frac{2gs}{a(a-s)}}\, r.$$

Hiermit hat man (§ 37, Nr. 1, verwendend):

6) $$\frac{ds}{dt} = r \sqrt{\frac{2gs}{a(a-s)}};$$

also, nach Trennung der Variabelen,

7) $$\sqrt{\frac{a-s}{s}}\, ds = r \sqrt{\frac{2g}{a}}\, dt.$$

Wird die Substitution

8) $$s = a \sin^2 \frac{1}{2} \theta$$

benutzt*), so geht Nr. 7 über in

9) $$a \cos^2 \frac{1}{2} \theta \, d\theta = r \sqrt{\frac{2g}{a}} \, dt.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

10) $$t = \frac{a}{2r} \sqrt{\frac{a}{2g}} (\theta + \sin \theta),$$

wobei die Constante abgeleitet ist aus dem Umstande, dass für $t = 0$, auch $s = 0$, mithin $\theta = 0$, sein muss.

Mit Ausnutzung von 8 hat man, statt Nr. 10, für die zum Durchfallen der Strecke s nöthige Zeit:

11) $$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \left(\sqrt{s(a-s)} + a \arcsin \sqrt{\frac{s}{a}} \right),$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt,

12) $$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \left(\sqrt{s(a-s)} + \frac{1}{2} a \arccos \frac{a - 2s}{a} \right).$$

Auf der Erdoberfläche kommt, laut Nr. 11, der fallende Körper an zu der Zeit

13) $$T = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \left(\sqrt{r(a-r)} + a \arcsin \sqrt{\frac{a-r}{a}} \right)$$

und, gemäss Nr. 5, mit der Geschwindigkeit

14) $$V = \sqrt{\frac{2gr(a-r)}{a}}.$$

Wird die durchfallene Höhe mit h bezeichnet, so nimmt Nr. 14 die Form

15) $$V = \sqrt{\frac{2ghr}{h+r}}$$

an und geht, wenn h, verglichen mit dem Erdhalbmesser, sehr klein ist, über in die aus der Physik allgemein bekannte Gleichung

16) $$V = \sqrt{2gh}.$$

---

*) Anmerkung. Die geometrische Bedeutung des Hilfswinkels θ ergiebt sich leicht mittelst der aus 8 folgenden Gleichung

$$a - s = a \cos^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{a}{2} (1 + \cos \theta),$$

wenn der Kreis Beachtung findet, für welchen AC ein Durchmesser ist.

§ 55. Das Fallen unter Widerstand, bei nichtveränderlicher Schwere.

A.

Die Höhe AB (Fig. 70, auf Seite 232) möge so klein sein, verglichen mit dem Erdhalbmesser, dass man auf die Veränderlichkeit der Schwere nicht Rücksicht zu nehmen braucht. Hingegen soll der durch den fallenden Körper (Punkt von der Masse 1) zu überwindende Luftwiderstand in Betracht kommen. Es möge vorausgesetzt werden, dass Letzterer dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional sei und für die Einheit von v den Werth μ habe.

Die Bewegung soll wieder (vergleiche § 54) zu der Zeit Null an der Stelle A ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnen.

Man berechne:

I. die von dem fallenden Körper nach Ablauf der Zeit t erworbene Geschwindigkeit v;

II. den während dieser Zeit durchlaufenen Weg $AP = s$;

III. v als Function von s;

IV. diejenige Höhe h, aus welcher der Körper herabfallen muss, wenn er mit der vorgeschriebenen Endgeschwindigkeit u auftreffen soll;

V. die Zeit T, welche er braucht, um eine gegebene Höhe H zu durchfallen.

Lösung. I. Den gemachten Voraussetzungen zufolge hat die Beschleunigung den Werth

1) $$p = g - \mu v^2.$$

Mithin lautet, gemäss § 37, Nr. 3, die Differentialgleichung der vorliegenden Bewegung:

2) $$\frac{d^2 s}{d t^2} = g - \mu v^2,$$

oder, wenn Nr. 2 des § 37 benutzt wird,

3) $$\frac{dv}{dt} = g - \mu v^2.$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung

4) $$\frac{\mu}{g} = k^2,$$

trennt die Veränderlichen und integrirt, so ergiebt sich zunächst:

5) $$g t = \int \frac{dv}{1 - k^2 v^2}.$$

Zerlegung des Nenners in Factoren und Spaltung in Partialbrüche liefert dann:

6) $$v=\frac{1}{k}\frac{e^{2gkt}-1}{e^{2gkt}+1},$$

wobei die Constante der Integration abgeleitet ist aus der Bedingung, dass für t gleich Null, auch v gleich Null sein soll.

Nr. 6 lässt sich in den Formen

7) $$v=\frac{1}{k}\frac{e^{gkt}-e^{-gkt}}{e^{gkt}+e^{-gkt}}$$

und

8) $$v=\frac{1}{k}\frac{1-e^{-2gkt}}{1+e^{-2gkt}}$$

geben.

Es nähert sich, laut 6, 7 und 8, die Geschwindigkeit mehr und mehr dem Werthe $\frac{1}{k}$, also $\sqrt{\frac{g}{\mu}}$.

II. Gemäss § 37, Nr. 1, giebt nun die Gleichung 7:

9) $$s=\frac{1}{k}\int\frac{e^{gkt}-e^{-gkt}}{e^{gkt}+e^{-gkt}}dt.$$

Hieraus folgt:

10) $$s=\frac{1}{gk^2}\,l\,\frac{e^{gkt}+e^{-gkt}}{2},$$

wenn die Bedingung

11) $$s_{t=0}=0$$

bezüglich der Constantenberechnung Ausnutzung findet.

III. Um die Geschwindigkeit v als Function von s zu erhalten, benutzen wir die Differentialgleichung Nr. 2 in der Form:

12) $$\frac{v\,dv}{ds}=g(1-k^2v^2).$$

Wird dieselbe integrirt und bei der Constantenbestimmung der Umstand berücksichtigt, dass s und v gleichzeitig zu Null werden, so ergiebt sich:

13) $$v=\frac{1}{k}\sqrt{1-e^{-2gk^2s}}.$$

IV. Hieraus entnimmt man für die Höhe h, aus welcher der Körper fallen muss, um mit der Geschwindigkeit u aufzutreffen, den Werth:

14) $$h=\frac{1}{2gk^2}\,l\,\frac{1}{1-k^2u^2}.$$

V. Endlich folgt für die Zeit T, welche zum Durchfallen der vorgeschriebenen Höhe H nöthig ist,

15) $$T = \frac{1}{2gk}\, l\, \frac{1+\sqrt{1-e^{-2gk^2H}}}{1-\sqrt{1-e^{-2gk^2H}}}.$$

B.

Man unterlasse nicht anzugeben, wie der Coefficient k mit Benutzung einer der vorausgegangenen Gleichungen experimentell, also durch auszuführende Messungen, bestimmt werden kann.

Ferner wende man die unter A gewonnenen Ergebnisse auf den Fall

16) $$\mu = 0$$

an, wobei die §§ 50, 77 und 78 des ersten Theiles dieses Werkes in Betracht kommen.

§ 56. Wurf, senkrecht nach oben, mit Widerstand.

Von der Erdoberfläche aus soll ein Körper (Punkt, Masse 1) mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen werden. Dabei mögen bezüglich der Schwere und des Luftwiderstandes die im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen gelten; auch soll die Zeit t wieder vom Beginne der Bewegung an gezählt sein. Man leite ab:

I. die Geschwindigkeit v, welche der im Sinne BA der Figur 70 (Seite 232) aufsteigende Körper zu der Zeit t hat;

II. den durchflogenen Weg $s = BP$ als Function von t, wie auch als solche von v;

III. die „Steighöhe" $BA = S$ und die zugehörige „Steigzeit" T, wobei A denjenigen Punkt der Bahn bezeichnet, an welchem der geworfene Körper umkehrt;

IV. die Geschwindigkeit v_1, mit welcher er wieder an der Erdoberfläche anlangt; endlich das Verhältniss von v_1 zu c.

Lösung. I. Die Differentialgleichung der Bewegung des aufsteigenden Körpers lautet (vergleiche § 55, Nr. 2 und 3):

1) $$\frac{dv}{dt} = -g - \mu v^2.$$

Macht man wieder (§ 55, 4) Gebrauch von der Abkürzung

2) $$\frac{\mu}{g} = k^2$$

und integrirt, so ergiebt sich:

3) $$\operatorname{arc\,tan} k v = C_1 - g k t,$$

also

4) $$k v = \tan (C_1 - g k t).$$

Nach einem bekannten Satze der Goniometrie ist das so viel, wie

5) $$k v = \frac{\tan C_1 - \tan g k t}{1 + \tan C_1 \tan g k t}.$$

Wird nun die Integrationsconstante C_1 aus der Bedingung

6) $$v_{t=0} = c$$

abgeleitet, so folgt für die zu der Zeit t herrschende Geschwindigkeit:

7) $$v = \frac{1}{k} \frac{c k - \tan g k t}{1 + c k \tan g k t},$$

was auch in der Form

8) $$v = \frac{1}{k} \frac{c k \cos g k t - \sin g k t}{c k \sin g k t + \cos g k t}$$

gegeben werden kann.

II. Mit Ausnutzung von Nr. 8 (und § 37, Gleichung 1) findet man:

9) $$s = \frac{1}{g k^2} l (\cos g k t + c k \sin g k t),$$

wobei die neue Integrationsconstante aus dem Umstande berechnet wurde, dass s gleich Null sein muss, wenn t gleich Null ist.

Ferner ergiebt sich die erstiegene Höhe leicht als Function von v, wenn die Differentialgleichung der Bewegung in der Form

10) $$\frac{v\,dv}{ds} = -g (1 + k^2 v^2)$$

zur Anwendung gelangt. Integration von Nr. 10 liefert nämlich sofort:

11) $$s = \frac{1}{2 g k^2} l \frac{1 + k^2 c^2}{1 + k^2 v^2},$$

wenn bei der Constantenberechnung die zu erfüllende Bedingung

12) $$s_{v=c} = 0$$

gehörige Berücksichtigung findet.

III. Für die „Steighöhe“ und die „Steigzeit“ entnimmt man den Gleichungen Nr. 11 und 8 die Werthe:

13) $$S = \frac{1}{2gk^2} l(1 + c^2 k^2),$$

bezüglich

14) $$T = \frac{1}{gk} \text{arc tan } ck.$$

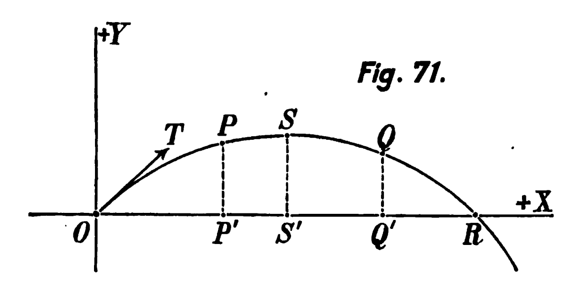
IV. Die Geschwindigkeit v_1, mit welcher der Körper wieder in B (Fig. 70) eintrifft, ergiebt sich, wenn S in die Gleichung 13 des vorigen Paragraphen eingeführt wird. Man erhält hierdurch:

15) $$v_1 = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2 k^2}}.$$

Es verhält sich also die Geschwindigkeit des Zurückkommens zu der des Aufsteigens, wie 1 zu $\sqrt{1 + c^2 k^2}$.*)

§ 57. Schiefer Wurf ohne Widerstand.

Mit der Anfangsgeschwindigkeit c und unter dem Erhebungswinkel $ROT = \gamma$ (siehe Fig. 71) möge ein Körper (Punkt,



Masse 1) von der Stelle O aus geworfen sein. Es soll angenommen werden, dass nur die Schwere wirke, dass also Widerstand nicht in Betracht komme.

Dann haben die beschleunigenden Kräfte p_x und p_y, welche im Sinne der durch die Fig. 71 angegebenen Coordinatenachsen wirken, die Werthe

1) $$p_x = 0, p_y = -g.$$

---

*) Näheres über die im Vorhergehenden behandelte Wurfbewegung: Fuhrmann, Aufgaben aus der analytischen Mechanik, Theil II, Nr. 33 der 2. Auflage.

Daher lauten (gemäss Th. I, S. 26) die Differentialgleichungen der Bewegung:

2) $$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-g,$$

oder, wenn die in den Richtungen der positiven Coordinaten vorhandenen Geschwindigkeiten mit v_x und v_y bezeichnet werden:

3) $$\frac{dv_x}{dt}=0, \frac{dv_y}{dt}=-g.$$

Von diesen Gleichungen ausgehend (und die Zeit selbstverständlich vom Beginne der Bewegung an zählend) gelangt man, in der aus den vorhergehenden Paragraphen ersichtlichen Weise, leicht zu den unter I bis IX folgenden Ergebnissen, deren Ableitung hiermit verlangt sein möge.

I. Parallel zum Horizonte OX (Fig. 71) hat der geworfene Körper die unveränderliche Geschwindigkeit

4) $$v_x=c\cos\gamma;$$

im verticalen Sinne die veränderliche

5) $$v_y=c\sin\gamma-gt.$$

Letztere ist anfänglich positiv, wird zu Null in dem Augenblicke

6) $$t=\frac{c\sin\gamma}{g}$$

und hat dann negative, dem absoluten Werthe nach immer wachsende Beträge, welche leicht durch eine Gerade graphisch dargestellt werden können, indem man t und v_y als rechtwinklige Coordinaten auffasst.

II. Für die in der Richtung der Bahn (genauer gesagt: ihrer Tangente) herrschende Geschwindigkeit v gilt die Gleichung:

7) $$v=\sqrt{c^2-2cgt\sin\gamma+g^2t^2}.$$

Sie lehrt, dass v anfänglich abnimmt, zu der durch Nr. 6 genannten Zeit den Minimalwerth

8) $$v_{\min}=c\cos\gamma$$

erreicht und dann stets wächst.

Bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten (t und v) führt die graphische Darstellung der Bahngeschwindigkeit auf eine Kegelschnittslinie.

III. Zu der Zeit t befindet sich der geworfene Körper an einer Stelle P (Fig. 71) deren Coordinaten, $OP' = x$, $P'P = y$, die Werthe

$$9)\qquad x = ct\cos\gamma,$$

$$10)\qquad y = ct\sin\gamma - \frac{1}{2}gt^2$$

haben.

IV. Die Bahngleichung lautet:

$$11)\qquad y = x\tan\gamma - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\gamma};$$

oder, wenn die zu der Anfangsgeschwindigkeit c gehörende Geschwindigkeitshöhe

$$12)\qquad h = \frac{c^2}{2g}$$

eingeführt wird:

$$13)\qquad y = x\tan\gamma - \frac{x^2\sec^2\gamma}{4h}.$$

Hiernach ist die Flugbahn eine gemeine Parabel, deren Achse senkrecht steht und deren Halbparameter die Länge

$$14)\qquad p = \frac{c^2\cos^2\gamma}{g}$$

hat.

Die Scheitelcoordinaten OS' und $S'S$, welche a und b heissen mögen, haben die Werthe

$$15)\qquad a = \frac{c^2\sin^2\gamma}{2g} = h\sin 2\gamma,$$

$$16)\qquad b = \frac{c^2\sin^2\gamma}{2g} = h\sin^2\gamma.$$

V. Die „Wurfhöhe“ ist gleich b; die „Wurfweite“ (OR der Fig. 71) gleich $2a$. Letztgenannte Strecke wird (bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit) für $\gamma = 45^0$ am grössten, nämlich gleich $2h$. Die Wurfhöhe beträgt dann die Hälfte von h, also ein Viertel der Wurfweite.

VI. Zu Erhebungswinkeln, welche um gleichviel von 45 Grad abweichen, gehören gleiche Wurfweiten.

VII. Soll die vorgeschriebene Stelle Q, deren Coordinaten OQ' und $Q'Q$ wir ξ und η nennen wollen, bei gegebenem Erhebungswinkel γ getroffen werden, so muss man mit der Anfangsgeschwindigkeit

17) $$c = \frac{\xi}{\cos\gamma}\sqrt{\frac{g}{2(\xi\tan\gamma - \eta)}}$$

werfen, welche aber nur beim Erfülltsein der Bedingung

18) $$\frac{\eta}{\xi} < \tan\gamma$$

reell und endlich ist.

Handelt es sich z. B. darum, unter einem Winkel von $55^0\,30'$ diejenige Stelle zu treffen, der die Coordinaten $\xi = 1000$ Meter und $\eta = 200$ Meter zukommen, so muss die Anfangsgeschwindigkeit

19) $$c = 110{,}4 \text{ Meter}$$

zur Benutzung gelangen.

VIII. Wenn Q bei vorgeschriebener Anfangsgeschwindigkeit c getroffen werden soll, so ist der nothwendige Erhebungswinkel γ durch die Gleichung

20) $$\tan\gamma = \frac{2h \pm \sqrt{4h(h-\eta) - \xi^2}}{\xi}$$

bestimmt, wobei h wieder die zu c gehörende Geschwindigkeitshöhe (12) bedeutet.

Aus Nr. 20 folgt, dass man die Stelle Q im Allgemeinen unter zwei Winkeln treffen kann und dass dieselben für

21) $$\xi = 2\sqrt{h(h-\eta)}$$

in einen übergehen.

Ueberschreitet ξ den durch Nr. 21 genannten Werth, so ist es unmöglich Q zu treffen; ebenso dann, wenn

22) $$\eta > h.$$

IX. Wird gefordert, dass der geworfene Körper nach Ablauf der vorgeschriebenen Zeit t bei Q ankomme, so muss er mit der Anfangsgeschwindigkeit

23) $$c = \frac{\sqrt{4\xi^2 + (2\eta + gt^2)^2}}{2t}$$

unter dem Winkel

24) $$\gamma = \operatorname{arc\,tan}\frac{2\eta + gt^2}{2\xi}$$

in O abfliegen.

Anmerkung. Erweiterungen des im § 57 Behandelten sehe man in der zweiten Auflage des zweiten Theiles der vom Verfasser dieses Buches veröffentlichten „Aufgaben aus der analytischen Mechanik“ auf Seite 58

bis 65 unter Nr. 66 bis 73. — Zahlenbeispiele, welche sich auf Wasserstrahlen und die zugehörigen Druckhöhen beziehen, enthält Weisbach-Herrmann's „Theoretische Mechanik“ auf S. 119 und 120 der 5. Auflage.

§ 58. Schiefer Wurf mit Widerstand.

A.

Es soll vorausgesetzt werden, dass bei der zu untersuchenden Bewegung ein Widerstand vorliege, welcher der Geschwindigkeit proportional ist und für die Einheit derselben den Werth k hat. Im Uebrigen möge das am Anfange des vorigen Paragraphen Genannte gelten. Auch soll die Fig. 71 (Seite 239) wieder Benutzung finden und das dort angegebene Coordinatensystem zur Verwendung gelangen.

Dann lauten (gemäss Th. I, S. 26) die Differentialgleichungen der Wurfbewegung:

1) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k v_x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - k v_y.$$

Man gebe, hiervon ausgehend, die Ableitung des im Nachfolgenden unter I bis VI Gefassten.

I. In den Richtungen der positiven x und y hat der geworfene Körper zu der Zeit t die Geschwindigkeiten

2) $$v_x = c_x e^{-kt},$$

bezüglich

3) $$v_y = \frac{1}{k}\left\{(g + k c_y) e^{-kt} - g\right\},$$

wobei c_x und c_y die in den genannten Achsenrichtungen vorhandenen Anfangsgeschwindigkeiten sind, also

4) $$c_x = c \cos \gamma, \quad c_y = c \sin \gamma$$

ist.

Aus Nr. 2 folgt, dass v_x fortwährend abnimmt (nach einer geometrischen Reihe) und dass es gegen Null convergirt, wenn die Zeit t ins Unendliche wächst.

Laut Nr. 3 hat v_y anfänglich positive Werthe, wird gleich Null zu der Zeit

5) $$t = \frac{1}{k}\, l\, \frac{g + k c_y}{g},$$

ist nachher negativ und geht für $t = \infty$ in $-\frac{g}{k}$ über.

II. Im Sinne der Bahntangente herrscht die Geschwindigkeit

6) $$v = \frac{1}{k}\sqrt{c_x^2 k^2 e^{-2kt} + \{(g + k c_y) e^{-kt} - g\}^2}.$$

Sie convergirt gegen die Grenze $\frac{g}{k}$. Es wird also die Bewegung einer gleichförmigen immer ähnlicher. Der Widerstand (kv) nähert sich mehr und mehr dem Werthe g, also der Beschleunigung der Schwere.

III. Die Coordinaten desjenigen Ortes P (Fig. 71), an welchem sich der geworfene Körper zu der Zeit t befindet, sind

7) $$x = \frac{c_x}{k}(1 - e^{-kt})$$

und

8) $$y = \frac{1}{k^2}\{(g + k c_y)(1 - e^{-kt}) - gkt\}.$$

Hieraus folgt:

9) $$x_{t=\infty} = \frac{c_x}{k},$$

10) $$y_{t=\infty} = -\infty.$$

Es besitzt mithin die Flugbahn eine Asymptote, welche senkrecht liegt und um die Strecke $\frac{c_x}{k}$ von dem Anfangspunkte O absteht.

IV. Die Gleichung der Wurflinie lautet:

11) $$y = \frac{1}{k}\left\{\frac{g + k c_y}{c_x}\, x - \frac{g}{k}\, l\, \frac{c_x}{c_x - kx}\right\}.$$

V. Der Scheitel S, also der höchste Punkt der Bahn, hat die Coordinaten:

12) $$a = \frac{c_x c_y}{g + k c_y}$$

und

13) $$b = \frac{1}{k^2}\left\{k c_y - g\, l\, \frac{g + k c_y}{g}\right\}.$$

VI. Letztgenannter Werth ist mit dem der „Wurfhöhe" identisch.

Die „Wurfweite" w, nämlich die Strecke OR der Fig. 71, ergiebt sich für jeden besonderen Fall aus der transcendenten Gleichung:

14) $$\frac{g+kc_y}{c_x}w - \frac{g}{k}\, l\, \frac{c_x}{c_x - kw} = 0.$$

Dass

15) $$w < 2a$$

ist (vergleiche § 57, V), folgt aus Nr. 11. Wird nämlich hier

16) $$x = 2a$$

gesetzt und η für y geschrieben, so entsteht:

17) $$\eta = \frac{1}{k^2}\left\{2kc_y - g\, l\, \frac{g+kc_y}{g-kc_y}\right\}.$$

Für

18) $$kc_y > g$$

fällt Das imaginär aus; es giebt also dann keinen Flugbahnpunkt, welcher zu der Abscisse $2a$ gehört. Für

19) $$kc_y = g$$

wird $\eta = -\infty$, was, mit Rücksicht auf Nr. 10, selbstverständliche Bedeutung hat. Ist schliesslich

20) $$kc_y < g,$$

so liefert Nr. 17 zwar ein reelles und endliches, aber ein negatives η. Da nämlich Letzteres in der Form

21) $$\eta = \frac{2g}{k^2}\left\{\frac{kc_y}{g} - \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+\frac{kc_y}{g}}{1-\frac{kc_y}{g}}\right\}$$

gegeben werden kann, so hat man, unter Benutzung des bekannten Satzes *)

22) $$\frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots,$$

dessen Giltigkeitsbedingung

23) $$-1 < x < +1$$

erfüllt ist,

24) $$\eta = -\frac{2g}{k^2}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{kc_y}{g}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{kc_y}{g}\right)^5 + \ldots\right\};$$

es liegt also der zu der Abscisse $2a$ gehörende Flugbahnpunkt unter dem Horizonte.

---

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Band 1, § 46 der 5. Auflage.

B.

Wird bezüglich des Widerstandes angenommen, dass er der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional sei, so gelten für die Wurfbewegung die Differentialgleichungen:

$$25)\qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -k v_x^2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - k v_y^2.$$

Ihre Behandlung macht weit mehr Schwierigkeiten, als die der Gleichungen Nr. 1. Für die Praxis empfiehlt sich die Anwendung von Näherungen. Man sehe hierüber (auch in Bezug auf Zahlenbeispiele) etwa folgende Literatur: Fuhrmann, Aufgaben aus der Mechanik, Theil II, S. 83—87 (Nr. 87 und 88) der 2. Auflage. — Ritter, Lehrbuch der analytischen Mechanik, § 37 der 2. Auflage. — Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte; Band 1, S. 368—373 der 2. Auflage. (Hier ist das „ballistische Problem“ zunächst unter der Voraussetzung behandelt, dass der Widerstand gleich $\alpha + \beta v^n$ sei, wobei α und β constante Grössen bezeichnen. Auch wird auf die betreffenden Arbeiten von Joh. und Nic. Bernoulli, Jacobi, Legendre und Nell verwiesen.) — Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, § 541 der 5. Auflage.

§ 59. Centralbewegungen.

A.

Ein Punkt (Masse 1) möge von einem festen Centrum O (Fig. 62 auf S. 176) proportional der Entfernung $OP = r$ derartig angezogen werden, dass für $r = 1$ diese Anziehung R den Werth k^2 hat.*)

Es soll die Bewegung zu der Zeit Null an der Stelle A, die um a von O abliegt, mit einer Anfangsgeschwindigkeit c begonnen haben, welche unter dem spitzen Winkel α gegen die feste Gerade OU gerichtet war. Ferner möge Alles auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, dessen positive X-Achse mit OU zusammenfällt und dessen positive Y-Achse, durch O gehend, nach oben gerichtet ist.

Widerstand soll nicht vorhanden sein; nur die Anziehung R möge wirken.

*) Man vergleiche die §§ 51—53 (geradlinige Schwingungen betreffend).

Dann haben die beschleunigenden Kräfte p_x und p_y, welche in den Richtungen der positiven Coordinaten thätig sind, die Werthe

1) $$p_x = -k^2 r \cos\theta = -k^2 x$$

und

2) $$p_y = -k^2 r \sin\theta = -k^2 y.$$

Mithin lauten (Th. I, S. 26) die Differentialgleichungen der Bewegung:

3) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x,$$

bezüglich

4) $$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y.$$

Sie führen (wenn man so verfährt, wie es im § 51 gezeigt worden ist) zu den unter I bis V genannten Ergebnissen, deren Ableitung hierdurch gefordert wird.

I. Die Geschwindigkeiten, mit denen sich der Punkt im Sinne der positiven Coordinaten und in seiner Bahn bewegt, haben, wenn er sich an der allgemeinen Stelle $P(x, y)$ befindet, die Beträge

5) $$v_x = \pm\sqrt{(a^2 k^2 + c_x^2) - k^2 x^2},$$

6) $$v_y = \pm\sqrt{c_y^2 - k^2 y^2},$$

7) $$v = \sqrt{(a^2 k^2 + c^2) - k^2 r^2}.$$

Dabei ist

8) $$r^2 = x^2 + y^2$$

und

9) $$c_x = c\cos\alpha,\quad c_y = c\sin\alpha,$$

es sind also c_x und c_y die Anfangswerthe von v_x und v_y.

II. Zu der Zeit t befindet sich der Punkt an dem durch die Coordinaten

10) $$x = \frac{c_x}{k}\sin kt + a\cos kt,$$

11) $$y = \frac{c_y}{k}\sin kt$$

bestimmten Orte.

III. Ferner hat er zu jener Zeit die Geschwindigkeiten:

12) $$v_x = c_x \cos kt - ak\sin kt,$$

13) $$v_y = c_y\cos kt,$$

14) $$v = \sqrt{(c\cos kt)^2 - akc_x\sin 2kt + (ak\sin kt)^2}.$$

IV. Die Bahngleichung lautet:

$$15)\quad c_y^2 x^2 + (c_x^2 + a^2 k^2) y^2 - 2 c_x c_y x y - a^2 c_y^2 = 0.$$

Oder in Polarcoordinaten:

$$16)\quad r^2 = \frac{a^2 c_y^2}{a^2 k^2 \sin^2 \theta + c^2 \sin^2(\alpha - \theta)}.$$

Der Punkt bewegt sich mithin in einer Ellipse, deren Centrum in O liegt und deren grosse Achse mit der Richtung OA einen Winkel ω bildet, welcher der Bedingung

$$17)\quad \tan 2\omega = \frac{2 c_x c_y}{a^2 k^2 + c_x^2 - c_y^2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{a^2 k^2 + c^2 \cos 2\alpha}$$

genügt. Die Halbachsenlängen können der Gleichung 16 entnommen werden.

V. Zu einem ganzen Umlaufe braucht der Punkt die Zeit

$$18)\quad T = \frac{2\pi}{k}.$$

Sie hängt, was besonders hervorgehoben werden möge, nicht ab von a, c und α.

Ferner ist diese für elliptische Schwingungen erforderliche Zeit derjenigen gleich, welche für geradlinige Giltigkeit hat. (Man sehe § 51, Gleichung 26.)

B.

Zur Erweiterung Desjenigen, was unter A gefasst wurde, sei die Benutzung folgender Literatur empfohlen: Ritter, analytische Mechanik, § 38 der 2. Aufl. — Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, S. 377 (§ 12) der 2. Aufl. des 1. Bandes. — Weisbach-Herrmann, theoretische Mechanik, S. 1236—1239 der 5. Aufl. — Hier wird auch gezeigt, wie die elliptische Bewegung sich auf Bewegungen einfacherer Art zurückführen lässt und (Weisbach, S. 1239) welche Beziehung sie zu den Wasserwellen hat.

Ueber andere Centralbewegungen, insbesondere über die nach dem Anziehungsgesetze

$$19)\quad R = k^2 r^{-2}$$

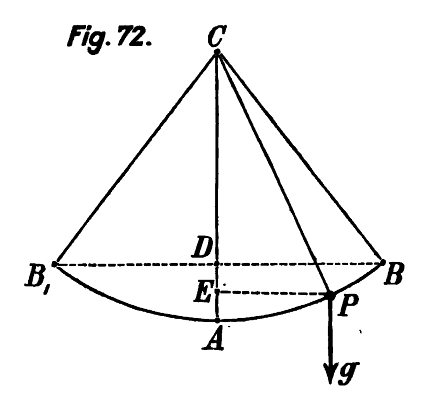
erfolgende Bewegung der Planeten, sehe man § 37, E; ferner das soeben genannte Ritter'sche Werk auf Seite 100—110, das Schell'sche auf S. 373—376 und 378—387 des 1. Bandes; endlich: Fuhrmann, Aufgaben aus der Mechanik, Nr. 83 und 84 der 2. Auflage des II. Theiles.

§ 60. Das Kreispendel.

A.

Sehr kleine Schwingungen.

Durch eine masselose Gerade, deren Länge gleich a ist, sei ein Punkt P, von der Masse 1, mit einem festen Drehpunkte C (Fig. 72) zu einem Kreispendel verbunden. Zu der Zeit Null



möge die Bewegung in B ohne Anfangsgeschwindigkeit begonnen haben; in der Zeit t soll der Weg BP durchlaufen worden sein. Wir bezeichnen die Längen der Bögen AP und AB mit s und b, die zugehörigen Ausschlagswinkel ACP und ACB mit σ und β.

Vorausgesetzt werde, dass keine andere Kraft wirke, als die Beschleunigung g der Schwere. Letztere ist zerlegbar in zwei Componenten, von denen die eine normal zur Bahn (in der Richtung CP) wirkt, folglich aufgehoben wird, die andere tangential, also den Punkt P treibend. Die Letztgenannte hat den Werth $g \sin \sigma$. Mithin lautet (gemäss Th. I, § 15) die Differentialgleichung der Bewegung:

$$1) \qquad \frac{d^2(b-s)}{dt^2} = g \sin \sigma,$$

oder

$$2) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \sigma.$$

Wir wollen nun zunächst Schwingungen voraussetzen, welche so klein sind, dass die Sinuswerthe aller in Betracht kommenden Ausschlagswinkel durch die zugehörigen Bogenlängen (auf den Halbmesser 1 reducirt) ersetzt werden dürfen (was, streng genommen,

nur für **unendlich kleine** Schwingungen zulässig ist). Dann geht Nr. 2 über in

$$3) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \frac{s}{a}.$$

Ausgehend von dieser Differentialgleichung soll berechnet werden

I. die Geschwindigkeit v, welche in der Richtung der Bahntangente herrscht, wenn P um die Bogenlänge s von A entfernt ist;

II. die zum Durchlaufen von BP nöthige Zeit t als Function von s oder σ; ferner die Bahnlänge s als Function von t; auch BP als $\varphi(t)$.

Endlich soll man

III. die unter I und II gefundenen Werthe von v und t gehörig deuten, insbesondere die für eine **ganze** Schwingung BAB_1 nöthige Zeit, welche T heissen möge, angeben.

Lösung. I. Aus Nr. 3 folgt, wie im § 51, auf welchen überhaupt hiermit verwiesen sein möge:

$$4) \qquad v = \pm \sqrt{\frac{g}{a}(b^2 - s^2)},$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt,

$$5) \qquad v = \pm \sqrt{ag(\beta^2 - \sigma^2)}.$$

II. Nun ergiebt sich, weil

$$6) \qquad v = -\frac{ds}{dt}$$

ist, mittelst nochmaliger Integration:

$$7) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{s}{b} = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{\sigma}{\beta}$$

als Zeit für das Durchlaufen des Bogens BP.

Gemäss Nr. 7 hat man:

$$8) \qquad s = b \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$$

und

$$9) \qquad \text{Bogen } BP = 2b \sin^2 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

III. Die Gleichung 4 sagt: v ist proportional der Länge der einen Kathete eines Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich dem Bogen AB und dessen andere Kathete gleich dem Bogen AP.

Durch die Stelle A geht P mit der Geschwindigkeit

10) $$v_{s=0} = \pm \sqrt{\frac{g}{a}}\, b.$$

Nr. 7 lehrt: Die zum Durchlaufen der Bahnlänge BP nöthige Zeit ist proportional demjenigen Bogen, dessen Cosinus gleich dem Verhältniss der Bogenlängen AP und AB.

Zur Ausführung einer ganzen Schwingung BAB_1 braucht das Pendel die Zeit

11) $$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Sie hängt nicht ab von der Ausschlagweite b. (Isochronismus der Schwingungen.)

Bei verschieden langen Pendeln verhalten sich, laut Nr. 11, die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

B.

Grössere Schwingungen.

Wenn Pendelschwingungen untersucht werden sollen, welche nicht so klein sind, dass man die Sinuswerthe mit denen der Bogenlängen (für den Halbmesser 1) vertauschen darf, so ist die Gleichung 2, an Stelle von Nr. 3, der Rechnung zu Grunde zu legen.

Wegen

12) $$s = a\sigma,$$

geht dieselbe über in

13) $$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{g}{a}\sin\sigma,$$

oder

14) $$\frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{g}{a}\sin\sigma;\quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Wird die linke Seite auf die Form $\frac{\sigma' d\sigma'}{d\sigma}$ gebracht, so erkennt man leicht, dass

15) $$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}\cos\sigma + \text{Constante}$$

der Gleichung Nr. 14 genügt.

Die Constante anlangend, gilt hierbei Folgendes: Wegen Nr. 12 ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{a}\cdot\frac{ds}{dt},$$

mithin, laut 6,

16) $$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{a} v,$$

also gleich dem negativen Werthe der Winkelgeschwindigkeit.

Für $\sigma = \beta$, wird $v = 0$; daher giebt hierfür die Gleichung 15:

17) $$0 = \frac{2g}{a} \cos\beta + \text{Const.}$$

Folglich besteht, laut 15 und 17, die Beziehung

18) $$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a} (\cos\sigma - \cos\beta);$$

oder, gemäss 16,

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{2g}{a} (\cos\sigma - \cos\beta).$$

Es ist also die Geschwindigkeit

19) $$v = \pm \sqrt{2ag(\cos\sigma - \cos\beta)},$$

20) $$v = \pm \sqrt{2g \,.\, DE},$$

dem freien Falle entsprechend.

Reducirt man die Gleichung 18 auf dt und integrirt (unter Benutzung einer Reihe) zum zweiten Male, so ergiebt sich, an Stelle von Nr. 11:

21) $$T = \pi \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\beta}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\beta}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6\frac{\beta}{2} + \ldots\right\} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Oder, wenn man die Fallhöhe DA mit h bezeichnet, wo dann

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2} = \frac{1 - \frac{a-h}{a}}{2} = \frac{h}{2a}$$

ist:

22) $$T = \pi \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^3 + \ldots\right\} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Durch Vergleichung von 21 oder 22 mit 11 lässt sich leicht ermitteln, in welchem Umfange von der zuletzt genannten Gleichung Gebrauch gemacht werden darf, ohne dass die Fehler zu gross sind. Es soll hierauf und auf die Ableitung von Nr. 21 (aus 18) nicht näher eingegangen werden.

Wer bezüglich jener Ableitung Näheres kennen lernen will, der benutze: Neumann, theoretische Physik, S. 36—38; wer sich unterrichten will, wie die elliptischen Functionen für die Theorie des Pendels Benutzung finden können, der sehe: Duhamel, analytische Mechanik, Bd. 1, S. 371—375. Wer Nachweise wünscht, bezüglich der vielseitigen Anwendbarkeit des Pendels, der lese § 13 des oben genannten Neumann'schen Buches; ferner: Günther, Geophysik, Bd. 1, Seite 171—181 (wo man auch werthvolle literarische und geschichtliche Angaben findet).

§ 61. Innere Reibung fester Körper.

Wenn man einen senkrecht aufgehängten, unten beschwerten Draht tordirt, also um seine Achse dreht, so macht er um letztere Schwingungen, deren Amplituden immer kleiner werden und zwar weit schneller, als es durch die alleinige Wirkung der äusseren Widerstände veranlasst sein könnte.

Die die Bewegung verursachende (verzögernde) Kraft besteht aus zwei Theilen, von denen der eine zu jeder Zeit t proportional ist dem Winkel φ, um welchen der Draht zu der genannten Zeit von der Gleichgewichtslage abweicht, der andere proportional der Geschwindigkeit

$$v = \frac{d\varphi}{dt},$$

welche in dem betreffenden Augenblicke herrscht.*) Es gilt für die Beschleunigung die Gleichung

$$1)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(k^2\varphi + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

wobei k und ε constante Grössen bezeichnen, die sich durch Versuche ermitteln lassen, ferner die Zeit t gezählt ist von dem Augenblicke an, in welchem man den Draht sich selbst überlässt, nachdem ihm die Anfangstorsion, die φ_0 heissen möge, ertheilt wurde.**)

Es soll durch Integration der Gleichung Nr. 1 (von welcher vorausgesetzt wird, dass sie aus der Physik bekannt sei) der Dreh-

*) Man vergleiche die §§ 51 und 60, in denen ein von der Geschwindigkeit abhängender Widerstand nicht vorliegt.

**) Näheres: Wüllner, Experimentalphysik, Bd. 1, § 60 der 4. Aufl.

winkel φ als Function der Zeit t berechnet und dabei angenommen werden, dass

2) $$k^2 > \varepsilon^2$$

sei. Man soll — was wohl für selbstverständlich gelten darf — hierbei auch angeben, wie sich die bei jener Integration auftretenden Constanten bestimmen lassen und welche Werthe sie haben.

Lösung. I. Die Gleichung Nr. 1 hat die Form

3) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0,$$

ist also eine „reducirte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung", nämlich ein besonderer Fall der Gleichung

4) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + T_1\frac{d\varphi}{dt} + T_2\,\varphi = 0,$$

in welcher T_1 und T_2 Functionen von t bedeuten.

Das allgemeine Integral φ der Differentialgleichung 4 ergiebt sich bekanntlich*), wenn man zwei particuläre von einander verschiedene Integrale φ_1 und φ_2 kennt, nach der Formel

5) $$\varphi = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2,$$

in welcher C_1 und C_2 willkürliche constante Grössen bedeuten.

Unter Beachtung der Eigenschaften der natürlichen Exponentialgrösse e^u lässt sich vermuthen, dass die Function

6) $$\varphi = e^{\lambda t},$$

in welcher λ einen erst noch zu bestimmenden constanten Factor bedeutet, der Gleichung 3 genügen werde.

Aus 6 folgt:

7) $$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\,e^{\lambda t},\quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzt man 6 und 7 ein in 3, so entsteht:

8) $$(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2)\,e^{\lambda t} = 0.$$

Mithin genügt die Function 6 der Gleichung 3, wenn λ so gewählt wird, dass es die Bedingung

9) $$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

erfüllt.

Aus Nr. 9 aber folgt:

10) $$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2},$$

also

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 113 der 5. Auflage.

11) $$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2},$$
und
12) $$\lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Gemäss 6, 11 und 12 sind daher die Functionen
13) $$\varphi_1 = e^{(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2})t}$$
und
14) $$\varphi_2 = e^{(-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2})t}$$
particuläre Integrale der Gleichung 3.

Laut 5, 13 und 14 ist also
$$\varphi = C_1 e^{(-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-k^2})t} + C_2 e^{(-\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-k^2})t},$$
oder, besser geschrieben,
15) $$\varphi = e^{-\varepsilon t}(C_1 e^{+\sqrt{\varepsilon^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\varepsilon^2-k^2}\,t})$$
das allgemeine Integral jener Gleichung.

Zufolge der Voraussetzung Nr. 2 hat $\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}$ einen imaginären Werth; wir setzen daher
16) $$\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - \varepsilon^2},$$
wobei i den Factor $\sqrt{-1}$ bedeutet, und haben, statt 15,
17) $$\varphi = e^{-\varepsilon t}(C_1 e^{+i\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t}).$$

Nun hat man sich zu erinnern, dass
18) $$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$
und
19) $$e^{-iu} = \cos u - i \sin u$$
ist, mithin für 17 geschrieben werden darf
$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\{C_1(\cos\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t + i\sin\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t)$$
$$+ C_2(\cos\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t - i\sin\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t)\},$$
besser
20) $$\varphi = e^{-\varepsilon t}\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t + (C_1 - C_2)\,i\sin\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\,t\}.$$

Oder, wenn
21) $$C_1 + C_2 = A,$$
22) $$i(C_1 - C_2) = B,$$
23) $$\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \beta$$
gesetzt wird:
24) $$\varphi = e^{-\varepsilon t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t).$$

Hiermit ist der Drehwinkel φ als Function der Zeit t berechnet, nur sind die Integrationsconstanten A und B noch zu bestimmen. Sie lassen sich daraus herleiten, dass (laut Aufgabe) $\varphi = \varphi_0$ ist,

wenn $t = 0$ und dass zu dieser Zeit offenbar die Geschwindigkeit der Bewegung des Drahtes gleich Null sein muss, weil der Vorgang, zufolge der Elasticität, eben erst beginnt.

Führt man die erste dieser beiden Bedingungen in Nr. 24 ein, so ergiebt sich:

25) $$\varphi_0 = A,$$

womit die eine der Constanten bestimmt ist.

Um die zweite Bedingung ausnutzen zu können, muss man zunächst die Geschwindigkeit, also $\frac{d\varphi}{dt}$, berechnen. Nr. 24 liefert, mit Verwerthung von 25:

26) $$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\varepsilon t}\{-(\beta\varphi_0 + B\varepsilon)\sin\beta t + (B\beta - \varepsilon\varphi_0)\cos\beta t\}.$$

Das giebt, für $t = 0$,

27) $$\frac{d\varphi}{dt} = B\beta - \varepsilon\varphi_0.$$

Mithin

28) $$B = \frac{\varepsilon}{\beta}\varphi_0.$$

Durch Einführung von 25 und 28 in 24 erhält man:

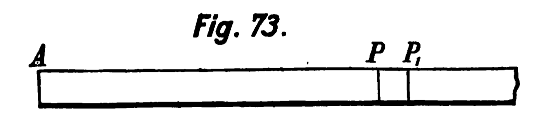
29) $$\varphi = \frac{\varepsilon \sin\beta t + \beta\cos\beta t}{\beta e^{\varepsilon t}}\varphi_0,$$

wobei β den durch 23 angegebenen Werth hat.

§ 62. Wärmeleitung in einem Stabe.

Der Stab (Fig. 73) sei umgeben durch Luft von der Temperatur Null. Sein Anfangspunkt A werde auf T Grad erwärmt

Fig. 73.



und in diesem Zustande erhalten. Der Querschnitt (q Flächeneinheiten) sei ein geringer. Die allgemeine Stelle P des Stabes soll um x Längeneinheiten von A abstehen und die (nicht bekannte) Temperatur t haben. Dann hat die Stelle P_1, welche um dx weiter absteht, die Temperatur

1) $$t_1 = t - dt.$$

Der beständige (stationäre) Zustand des Stabes tritt ein, wenn jedes Element desselben von dem vorhergehenden Elemente so viel Wärme empfängt, als es an das folgende und an die umgebende Luft abtritt, welcher letzteren in irgend einer Weise die Temperatur Null erhalten wird.

Nimmt man an, dass innerhalb des unendlich kleinen Stabstückchens dx die Temperatur dem Abstande von A proportional sei, so ist der Temperaturunterschied zweier Stabquerschnitte, welche um die Längeneinheit von einander abstehen, gleich $\frac{dt}{dx}$, wenn innerhalb dieser Länge dasselbe Gesetz der Temperaturabnahme Giltigkeit hat.

Wenn man sich nun die Wärmeleitung wie das Fliessen einer Flüssigkeit vorstellt, so ergiebt sich Folgendes: Durch den Querschnitt q geht an der Stelle P in der Zeiteinheit die Wärmemenge

2) $$w = kq\frac{dt}{dx},$$

wenn mit k die innere Wärmeleitungsfähigkeit des Stabmaterials bezeichnet wird, nämlich diejenige Wärmemenge, welche in der Zeit 1 durch die Flächeneinheit fliesst, falls zwei im Abstande 1 befindliche Querschnitte 1^0 C Temperaturunterschied haben.

Ferner geht, Nr. 2 entsprechend, an der Stelle P_1 durch den Querschnitt q in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$w_1 = kq\frac{dt_1}{dx},$$

d. i., laut Nr. 1,

3) $$w_1 = kq\frac{dt - d^2t}{dx}.$$

Da also das zwischen P und P_1 liegende Stabelement die Wärmemenge w empfängt, hingegen die kleinere w_1 nach innen abgiebt, so muss es bei dem stationären Temperaturzustande nach aussen die Wärmemenge

4) $$w - w_1 = kq\frac{d^2t}{dx}$$

abgeben.

Andererseits aber gilt Folgendes: Wird mit p der Umfang des Stabes bezeichnet, so ist $p\,dx$ die Oberfläche des zwischen P und P_1 liegenden Stabelementes. Daher

5) $$ht.pdx$$

die von diesem Elemente in der Zeiteinheit nach aussen abgegebene Wärmemenge, wenn mit h die äussere Wärmeleitungsfähigkeit des Materials bezeichnet wird, nämlich diejenige Wärmemenge, welche die Fläche 1 in der Zeit 1 nach aussen abgiebt, falls die Temperatur der Oberfläche des Stabes von derjenigen der Umgebung um 1^0 abweicht.

Es muss also, gemäss 4 und 5,

$$kq\frac{d^2t}{dx}=htpdx,$$

mithin

6) $$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{hp}{kq}t$$

sein.

Durch Integration dieser die Wärmefortpflanzung kennzeichnenden Differentialgleichung zweiter Ordnung soll nun die Temperatur t abgeleitet werden, ausgedrückt durch x, h, k, p, q und T. Die beiden Integrationsconstanten sollen hierbei, nachdem der allgemeine Integralwerth abgeleitet ist, Berechnung finden aus dem Umstande, dass der Stabanfang A die Temperatur T hat und das Ende eines unendlich langen Stabes die Temperatur Null haben müsste.

Die für t gewonnene Formel möge in Worte gefasst und dann zur Herleitung derjenigen Temperaturen benutzt werden, welche in den Abständen a, $2a$, $3a$, ... vom Stabanfange A herrschen.

Lösung. Die Gleichung 6 lautet, wenn wir, zur Abkürzung, den constanten positiven Werth

7) $$\frac{hp}{kq}=\alpha^2$$

setzen,

8) $$\frac{d^2t}{dx^2}=\alpha^2t,$$

ist also von der Form

9) $$y''=f(y).$$

Wir schreiben daher statt 8:

10) $$\frac{t'dt'}{dt}=\alpha^2t,$$

wobei

11) $$t' = \frac{dt}{dx},$$

und haben:

12) $$t'\,dt' = \alpha^2 t\,dt.$$

Durch Integration folgt hieraus:

13) $$t' = \pm\sqrt{\alpha^2 t^2 + C_1^2},$$

wenn mit C_1 eine Constante bezeichnet wird.

Benutzt man nun Nr. 11 und integrirt nochmals, so ergiebt sich:

14) $$\frac{1}{\alpha}\,l\left(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + C_1^2}\right) = x + C_2,$$

wobei C_2 eine neue Constante bedeutet.

Wird jetzt auf t reducirt, so folgt:

15) $$t = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x},$$

wenn die zu den Exponentialgrössen gehörenden constanten Factoren A und B genannt werden.

Nun sind der Letzteren Werthe zu berechnen. In dieser Beziehung gilt Folgendes: Da

16) $$t_{x=0} = T$$

sein muss, so giebt Nr. 15:

17) $$T = A + B.$$

Ferner liefert es, wegen

18) $$t_{x=\infty} = 0,$$

die Gleichung:

19) $$A = 0.$$

Aus 19 und 17 folgt nun:

20) $$B = T$$

und damit geht Nr. 15 über in

21) $$t = T e^{-\alpha x},$$

also, wegen 7, in

22) $$t = T e^{-\sqrt{\frac{hp}{kq}}\,x}.$$

Diese Gleichung sagt: wenn die Abstände von dem Stabende (oder von der Wärmequelle) in einer arithmetischen Reihe wachsen, so nehmen die Temperaturen der Stabquerschnitte, nach einer geometrischen Reihe ab.

Für

23) $$x = 0,\ a,\ 2a,\ 3a, \ldots.$$

liefert die Gleichung 22 die Temperaturen

24) $$t = T,\ e^{-a\sqrt{\frac{hp}{kq}}}\,T,\ e^{-2a\sqrt{\frac{hp}{kq}}}\,T,\ e^{-3a\sqrt{\frac{hp}{kq}}}\,T, \ldots.*)$$

§ 63. Anregungen und Anmerkungen, betreffend einige auf Differentialgleichungen führende Aufgaben aus der Elektricitätslehre.

Wer Untersuchungen kennen lernen will, welche, der Lehre vom Magnetismus und der Elektricität angehörend, die Integration leicht behandelbarer Differentialgleichungen zweiter Ordnung verlangen, der sei, beispielsweise, verwiesen auf:

I. die Berechnung des freien Magnetismus der Oberfläche eines gleichmässig magnetisirten Stabes;

II. die Messung eines kurze Zeit dauernden elektrischen Stromes;

III. die Behandlung der unter dem Einflusse einer Dämpfung stehenden Schwingungen einer Magnetnadel.

Dabei möge zu I—III Folgendes bemerkt werden:

I. Eine von den Grundsätzen der Wärmeleitung (§ 62) ausgehende Berechnung des unter I genannten freien Magnetismus hat Jamin gegeben. Sie führt, zufolge der benutzten Analogie, auf eine Differentialgleichung, welche mit Nr. 6 des § 62 in der Form ganz übereinstimmt. Man sehe hierüber: Comptes rendus, 82 (1876), p. 783. (Abhandlung von Jamin); oder: Wiedemann, die Lehre von der Elektricität, Bd. 3, § 417 der 3. Auflage.

II. Bei der mathematischen Behandlung der unter II genannten Messung von Strömen oder Elektricitätsmengen

*) Näheres über die Fortpflanzung der Wärme durch Leitung, insbesondere über die experimentelle Prüfung der vorstehenden, zuerst von Biot (traité de physique; tome IV) gegebenen Theorie, wie auch über die Ermittelung der Constanten, sehe man im § 31 der 3. Aufl. des 3. Bandes der Experimentalphysik von A. Wüllner.

kommt man im Wesentlichen auf Das, was im § 60 unter *B* gefasst wurde; es hat die Differentialgleichung die daselbst mit Nr. 13 bezeichnete Form. Näheres: Kohlrausch, praktische Physik, S. 268 und 269 der 6. Auflage.

III. Schwingt eine Magnetnadel unter dem Einflusse einer (von der Luftreibung oder umgebenden Metallmassen herrührenden) „Dämpfung", deren Intensität der Nadelgeschwindigkeit proportional ist, so liegt der Bewegung, wenn kleine Schwingungen vorausgesetzt werden, die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 (x - p) + 2 \varepsilon \frac{dx}{dt} = 0$$

zu Grunde. In derselben bedeutet x die zu der Zeit t vorhandene Ablenkung der Nadel; n^2 die auf letztere wirkende Richtkraft getheilt durch das Trägheitsmoment; 2ε die verzögernde Wirkung der Dämpfung bei der Nadelgeschwindigkeit 1, ebenfalls durch das Trägheitsmoment dividirt; p den der Ruhelage entsprechenden Skalentheil.

Die Gleichung 1 steht in naher Beziehung zu Nr. 3 des § 61. Bei der Integration sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Man sehe hierüber: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 1, § 113 der 5. Auflage; ferner von dem oben (I) genannten dritten Bande des Wiedemann'schen Werkes die §§ 237—246 und 331, wo auf die betreffenden Arbeiten von Gauss und E. Du Bois-Reymond verwiesen ist.

Alphabetisches Sachenverzeichniss.

Die Zahlen bedeuten die **Paragraphen** (nicht die Seiten).

Literaturverzeichniss.

Auf die im Nachfolgenden genannten Abhandlungen, Bücher und Zeitschriften wurde verwiesen:

Abhandlungen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften.
Annalen der Physik und Chemie.
Annales de chimie et de physique.
Archiv der Mathematik und Physik.
Arrhenius, S., Einfluss der Neutralsalze auf die Reactionsgeschwindigkeit der Verseifung von Aethylacetat. (Zeitschr. f. physikal. Chemie, J. 1887, S. 110—133.)
Bauer, über das Wesen und die Bedeutung der neuen chemischen Formeln. (Wochenschrift des Oesterreich. Ingenieur- und Architekten-Vereins. Jahrg. XII, S. 189—194.)
Bauernfeind, C. M. v., Vermessungskunde. 6. Aufl. 1879.
Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie.
Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin.
Berichte über die Verhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe.
Bermann, E. O., zur Lehre vom mittleren Radius. Liegnitz, 1888.
Berthelot, essai d'une théorie sur la formation des éthers. (Ann. d. ch. e. d. phys., 1862, t. 66, p. 110—128.)
Berthot, P., des forces mutuelles et de leurs applications aux phénomènes mécaniques, physiques et chimiques. (Mémoires de la société des ingénieurs civils; 1885, II, p. 588—626.)
Boguski, J. G., über die Geschwindigkeit der chemischen Vorgänge. (Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, J. 1876, S. 1646—1652.)
Bohl, P., das Gesetz der molekularen Attraction. (Annalen d. Phys. u. Chemie. N. F., Bd. 36 [1889]; S. 334.)
Bornemann, G., siehe: Jahrbuch der Erfindungen.
Buchanan, J. Y., über die Bildung und die Zersetzung einiger chlorirten Säuren. (Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft: Jahrg. 1871, S. 340—342.)
Burchard, O., über die Oxydation des Jodwasserstoffes durch die Sauer stoffsäuren der Salzbilder. (Zeitschr. f. phys. Chemie, Bd. II, J. 1888, S. 796—839.)
Civilingenieur, Der. Zeitschrift, herausgegeben von Hartig.
Clausius, R., die Potentialfunction und das Potential. 2. Aufl. 1867.
——, die mechanische Wärmetheorie. 2. Aufl. 1876, 79 u. 89.
Comptes rendus.
Conrad, M., siehe Hecht, W.

Czuber, E., geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe. 1884.
——, Mittelwerthe, die Krümmung ebener Curven und krummer Flächen betreffend. (Archiv der Mathem. u. Phys., R. II, T. 6, S. 294—304.)
Dinglers Polytechnisches Journal.
Dorn, E., siehe: Neumann, F.
Drobisch, über die mittleren Radien der Linien, Flächen und Körper. (Berichte üb. die Verhandl. der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften; 1858; S. 124 u. f.)
Du Bois-Reymond, E., Antwort auf die Antrittsrede des Herrn Landolt. (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Jahrg. 1882; S. 728—731.)
Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik; deutsch von Schlömilch. 2. Aufl. 1858.
Esson; siehe Harcourt.
Exner, F., Vorlesungen über Elektricität. 1888.
Foeppl, A., siehe: Navier.
Fuhrmann, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik. In 2 Theilen. 2. Aufl. 1879 u. 81.
——, über die Differentialgleichung chemischer Vorgänge dritter Ordnung. (Zeitschr. f. physikal. Chemie, Bd. IV, S. 89—95.)
——, über mittlere Reactionsgeschwindigkeiten. (Zeitschr. f. physikal. Chemie, Bd. IV, S. 520—524.)
Galitzine, B., über die Wirkungsweite der Molekularkräfte. (Zeitschr. f. physikal. Chemie, Bd. IV, S. 417.)
Gauss, allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. 1840.
Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. 2. Aufl., 1878.
Green, G., an Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. 1828.
Gretschel, H., siehe: Jahrbuch der Erfindungen.
Günther, S., Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. 2 Bde. 1884 u. 85.
Guldberg, C. M., u. **Waage, P.**, études sur les affinitées chimiques. 1867.
——, über die chemische Affinität. (Journal f. prakt. Chemie, Bd. 127 [J. 1879], S. 69—114.)
Hagen, G., über die Oberfläche der Flüssigkeiten. Eine in der Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung. 1845.
Harcourt and Esson, on the Laws of Connexion between the Conditions of a Chemical Change and its Amount. (Philosophical transactions; 1866, p. 193—222; 1867, p. 117—137.)
Harnack, Ax., über die einfachsten Methoden zur angenäherten Berechnung ebener Flächen. (Civilingenieur, Bd. 28.)
Hartig, E., siehe: Civilingenieur.
Hattendorff, K., siehe: Riemann, B.
Hecht, W., und **Conrad, M.**, Beiträge zur Bestimmung von Affinitätscoefficienten. (Zeitschr. f. physik. Chemie, J. 1889, S. 450—475.)
Helmert, R., die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 2 Theile; 1880 u. 84.
Herrmann, G., siehe: Weisbach, J.
Hirst, on equally attracting bodies (Phil. Magazine, IV. Ser., Vol. 13 [1857], p. 305—324; Vol. 16 [1858], p. 161—177, 266—284.)
Hoff, J. van 't, Ansichten über die organische Chemie. In 2 Thln. 1878 u. 81.
——, études de dynamique chimique. 1884.
——, siehe: Zeitschrift für physikalische Chemie.

Hood, J. J., on the laws of chemical change. (Philos. magazine, 1878, II, p. 371—383.)
Horstmann, Landolt und **Winkelmann**, Lehrbuch der physikalischen und theoretischen Chemie. In 3 Abtheilungen; 1885.
Jahrbuch der Erfindungen. Herausgegeben von H. Gretschel und G. Bornemann.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.
Jamin, J., solution analytique du problème de la distribution dans un aimant. (Comptes rendus, 82 [1876] p. 783.)
Jolly, die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation; 1881. (Abdruck aus dem 14. Bande der Abhandlungen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften.)
Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 3. Aufl. 1888.
Journal für praktische Chemie.
Kant, J., metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. 2. Aufl. 1787.
Kiepert, L., siehe: Stegemann, M.
Kohlrausch, F., Leitfaden der praktischen Physik. 5. Aufl. 1884; 6. Aufl. 1887.
———, Beiträge zur Kenntniss der elastischen Nachwirkung. (Annalen der Physik u. Chemie, Bd. 128, S. 1—20, 207—227, 399—419.)
Kunzek, Studien aus der höheren Physik. 1856.
Landolt, siehe Horstmann u. Du Bois-Reymond.
Launhardt, W., mathematische Begründung der Volkswirthschaftslehre. 1885.
Magazine, philosophical, and journal of science.
Mehmke, R., ein graphisches Interpolationsverfahren. (Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Band 33, S. 583.)
Mémoires et compte rendu des travaux de la société des ingénieurs civils.
Meyer, V., chemische Probleme der Gegenwart. 2. Aufl. 1890.
Meyerhoffer, W., über beschleunigende und verzögernde Wirkungen bei chemischen Vorgängen. (Zeitschr. f. physikal. Chemie, Bd. 2, [J. 1888], S. 585—601.)
Minding, Integraltafeln. 1849.
Navier, Mechanik der Baukunst. Nebst einem Anhange von G. Westphal und A. Foeppl. Mit einer Vorrede von M. Rühlmann. 1879.
Neumann, F., Einleitung in die theoretische Physik. Herausgegeben von C. Pape. 1883.
———, Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeb. v. E. Dorn. 1885.
Nordenskjöld, A. E., über den Einfluss der Temperatur auf die Fähigkeit des Wassers, Salze aufzulösen. (Annalen der Phys. u. Chemie; Reihe V, Bd. 16, S. 309—317.)
Ostwald, W., Lehrbuch der allgemeinen Chemie. In 2 Bdn. 1885 u. 87.
———, Grundriss der allgemeinen Chemie. 1889.
———, siehe: Zeitschrift für physikalische Chemie.
———, Studien zur chemischen Dynamik. (Journ. für prakt. Chemie, Bd. 135 [J. 1883], S. 1—39; Bd. 136 [J. 1883], S. 449—495.)
Pape, C., siehe: Neumann, F.
Poisson, Lehrbuch der Mechanik. Uebersetzt von A. Stern. 1835 u. 36.
Rees, van, über die Vertheilung des Magnetismus in Magneten. (Annalen der Physik u. Chemie, Bd. 70, S. 1—24 u. Bd. 74, S. 213—230.)
Riemann, B., partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Bearbeitet und herausgegeben von K. Hattendorff. 2. Aufl. 1876.
Ritter, A., Lehrbuch der analytischen Mechanik. 2. Aufl. 1883.
Rühlmann, M., siehe: Navier.
———, **R.**, die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. 1870.
Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl. 1879 u. 80.